Hydrodynamique côtière

partie 2 : vagues



Cours de seconde année, Master Mécanique-Physique

par Fabrice Ardhuin, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, Brest, France $1^{\rm er} \ {\rm octobre} \ 2007$

Table des matières

I.	GÉN	ÉRALITÉS ET PROPRIÉTÉS DE LA HOULE D'AIRY 1
	А.	Les vagues
	в.	Mouvement des vagues : quelques observations
		1. Analyse vague par vague
		2. Analyse spectrale
	С.	Equations pour la propagation des vagues
	D.	Petites vagues au dessus d'un fond plat : la théorie d'Airy 9
		1. Solution
		2. Propriétés cinématiques : influence du paramètre kD
		3. Et dans l'air?
		4. Dispersion et énergie
		5. Energie et puissance 16
		6. Dérive de Stokes 16
		7. Ce qu'il faut retenir
		8. Pour aller plus loin : extensions de la théorie d'Airy
II.	HOU	LE RÉGULIÈRE D'AMPLITUDE FINIE
	А.	Théorie de Stokes pour les faibles non-linéarités
	в.	Méthodes de calcul des houles régulières d'amplitude finie 23
	С.	Cinématique des houles d'amplitude finie
	D.	Propriétés intégrales 24
TTT	3740	
111.	VAC	Le sportre des vagues 27
	А.	Le spectre des vagues
		1. Nombre d'onde ou frequence : 29 2. Qualques spectres 20
	ъ	2. Querques spectres
	в.	Rudiments d'analyse spectrale 30 1 Superture et transformation d'analyse 20 20
		1. Spectre et transformee de Fourier discrete
	C	2. Estimation pratique
	C.	Utilisation du spectre
		$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
		2. Relations entre le spectre et l'analyse vague par vague 32
	ъ	3. Parametres spectraux et integraux : H_s , T_p
	D.	Ubservation de vagues aleatoires
		1. La perche a houle
		2. La bouee houlographe 35
		3. Le capteur "P-U-V" \ldots 36
		4. Reseaux de capteurs
		5. L'altimetre satellite 37
		6. Spectres par radar
		7. Synthèse d'ouverture 38
		8. Radar en incidence rasante
	_	9. Radar à onde de surface $\dots \dots \dots$
	Е.	Les limitation de la description des vagues par un spectre 42
IV	РДЕ	AMÈTRES PRINCIPAUX ET SPECTRES ORSERVÉS 43
± • •	Δ	Croissance avec le fetch
	R R	Développement complet et âge des vagues
	Ъ.	Limitation par le fetch
		2. Limitation par le temps
	С	Spectres en fréquence
	0.	1 Les nionniers
		2. L'ère moderne

	D.	\mathbf{Spec}	tres directionnels	47
	Е.	Synt	hèse	52
		1.	Paramètres déterminants	52
		2.	Forme spectrale	52
V.	GÉN	Γ É ΒΑΤ	TION DES VAGUES ET ÉVOLUTION AU LABGE	53
••	A	Géné	ération des vagues par le vent	53
	11.	1	Pression dans l'air et croissance des vagues	53
		า. ว	Théorie de Phillips : de la tubulance du vent à l'énorgie des vagues	57
		4. 9	Couplege vent vingues	57
		ე. ⊿	Effet d'abri ang décellement	- 60 - 60
		4. F	Effet de la madulation de la toncion de cont	60
		5.	Effet de la modulation de la tension de vent \dots	62 62
	Б	6. 	Parametrage de S_{in}	62
	в.	Evol	ution faiblement non-lineaire des vagues	64
		1.	Interactions vague-vague	64
	с.	"Dis	sipation" d'énergie	67
		1.	Effet de la viscosité dans l'eau	67
		2.	Effets de la turbulence dans l'eau	67
		3.	Déferlement	68
	D.	Bilar	n spectral	73
	Е.	Mod	élisation numérique	76
VI.	EVO	LUTI	ON DES VAGUES DU LARGE VERS LA CÔTE	79
	Α.	Réfr	action et diffraction	79
		1	Réfraction	79
		1. 2	Levage ('shoaling')	80
		⊿. ૧	Diffraction	82
	в	J.	pos effets du fond nour des vegues linépires	86
	Б.	A UU	Diffusion et réflection portielle	00 96
		1.	Diffusion et renection partiene	00
		2.		81
	C	3. 		93
	С.	Mod	eles non-lineaires de propagation	95
		1.		95
VII.	INTI	ERAC'	TIONS VAGUES - COURANTS	97
	А.	Effet	s du courant sur les vagues	97
		1.	Vagues sur un courant variant verticalement	97
		2.	Variation horizontale du courant et refraction	97
		3.	Conservation de l'action	97
	В.	Mou	vements Lagrangiens et Eulériens	98
	Ъ.	1	Flux de masse et de quantité de mouvement	98
		1. 2	Movenne Lagrangianne généralisée	08
	С	2. Effet	s des vanues sur la circulation	101
	0.	1	Quantité de mouvement totale et tensions de radiation	101
		1. ว	Quantité de mouvement de la circulation et tensions d'internation	101
		⊿. ว	Quantité de mouvement de la circulation et tensions d'interaction	100
	р	ა. ი	Equations en trois dimensions	111
	D.			111
		1.		111
	Б	2.	Raccordement avec la couche limite permanente	112
	E.	La co	ouche mélangée océanique	112
		1.	Mélange et dérive	112
		2.	Circulations de Langmuir	115
		3.	Etat de la mer et flux océan-atmosphère	115

VIII. VAGUES ET CIRCULATION LITTORALE 11	7
A. Déferlement bathymétrique $\dots \dots \dots$	17
B. Forçage de la circulation par les vagues	19
C. Décôte et surcôte	19
1. Equations pour l'écoulement moyen	19
2. Application aux variations du niveau moyen	19
3. Courant littoral et instabilités	21
4. Dérive de fond 12	22
5. Ondes longues	22
Bibliographie	:5

I. GÉNÉRALITÉS ET PROPRIÉTÉS DE LA HOULE D'AIRY

A. Les vagues

Depuis les rides à la surface d'une flaque d'eau jusqu'aux déferlantes sur la plage nous avons tous vu des vagues. Elles sont familières et parfois menaçantes voire meurtrières pour les navigateurs, pêcheurs anonymes ou professionels de la courses au large (e. g. Pierson 1972, Greenslade 2001). Les vagues peuvent exercer des forces importantes : allez donc rester debout dans l'eau, sur une plage, devant une vague de deux mètres qui déferle. Et deux mètres c'est encore bien peu, la plus haute vague générée par le vent qui ait été observée en mer mesurait 34 m (Bascom 1959). Connaître et prévoir les caractéristiques des vagues est donc un besoin important pour les activités marines, que ce soit pour préparer une sortie en mer, dimensionner un ouvrage tel qu'une digue ou une plateforme pétrolière, dessiner un navire. Les vagues, par leurs effets sur les flux entre l'océan et l'atmosphère, ont aussi des effets directs ou indirects sur les circulations de l'océan et de l'atmosphère, et donc le climat. On appellera ici "vagues" les ondes qui sont directement ou indirectement générées par le vent. Ces oscillations sont généralement irrégulières, avec un temps entre deux crêtes, la période T, qui est typiquement inférieure à 30 secondes, on verra pourquoi. On s'intéressera aussi aux ondes longues, de période 10 secondes à 10 minutes, qui sont liées aux modulations de l'amplitude des vagues. Pour tous ces mouvements la distance moyenne entre deux crêtes, la longueur d'onde moyenne L, augmente avec la période. Pour les vagues cette longueur d'onde varie de quelques centimètres à près d'un kilomètre.

La gravité, qui "lutte contre les variations de hauteur de la surface", est la force qui entretient les oscillations pour les ondes les plus longues. Une autre force vient la relayer dès que la courbure de la surface est importante : la tension de surface (ou force capillaire) qui vient des propriétés thermodynamiques (y compris chimiques) de l'interface entre les deux fluides que sont l'eau et l'air, son effet principal est de "lutter contre la courbure de la surface". Cette force explique, entre autres, que les gouttes d'eau sont rondes car c'est la forme géométrique dont la courbure est minimale pour un volume donné. Cette tension de surface n'est importante que pour les vagues très courtes qui sont appelées ondes capillaires, avec des longueurs d'ondes de quelques centimètres ou moins. Si la gravité et la tension de surface ne gagnent pas (pas tout de suite) dans leur lutte contre la pente et la courbure de la surface, c'est parce que les particules fluides ne sont pas en équilibre. Les oscillations de l'interface air-eau sont ainsi maintenues par un échange entre énergie cinétique et énergie potentielle (gravitationnelle et/ou capillaire), jusqu'à ce que ces énergies soient dissipées, on verra comment. Les vagues sont donc, pour le scientifique, des ondes de gravité, des ondes de gravité-capillarité, ou bien encore des ondes capillaires pour les plus courtes.

Dans la famille des ondes de gravité, à l'autre extrême des grandes échelles, les oscillations lentes de la surface font intervenir la force de Coriolis qui est liée à la rotation de la terre sur elle même (Ondes de Kelvin et Poincaré). Ces ondes très longues sont engendrées par le mouvement des astres (comme la marée) ou les variations des vents à grande échelle, par un mécanisme très différent de la génération des vagues. Entre les vagues et ces oscillations très lentes, on trouve, heureusement rarement, des ondes de gravité importantes, dont les longueurs d'ondes sont de plusieurs dizaines de kilomètres au large : les raz-de-marée ou tsunamis. Ils sont provoqués par une perturbation initiale (glissement de terrain sous-marin, tremblement de terre, chute de météorite) qui créent une dépression et une sur-élévation de la surface océanique, généralement faible, mais homogène sur une grande distance. Cette dépression rayonne un train d'onde de l'ordre de cinq vagues successives, de plusieurs dizaines de minutes de période, et qui s'amplifie en arrivant sur la côte : si vous voyez la mer se retirer rapidement, ne la suivez pas car une grosse vague va suivre.

En pratique l'océan est agité par tous ces phénomènes. Heureusement, il est souvent facile de les discerner et de les étudier séparément. La séparation entre les ondes de Kelvin et Poincaré et les vagues est bien justifiée par la grande différence des échelles de temps et d'espace, comme l'illustre la figure 1.1. Par contre la séparation avec les ondes capillaires est assez artificielle et vise essentiellement à simplifier les calculs ci-dessous. Si pour beaucoup de phénomènes associés aux vagues la tension de surface peut être négligée, elle reste tout de même très importante pour la dissipation de l'énergie des vagues et la rugosité de la surface, et donc la télédétection.



FIG. 1.1 – Exemple de mesure de pression convertie en hauteur d'eau, par 20 m de fond environ dans l'anse de Berthaume, le 31 janvier 2004.

On voit la superposition d'une houle irrégulière, de hauteur significative $H_s = 2,85$ m en surface et période du pic 11 s et de la marée qui descend doucement, d'environ 20 cm sur les 20 minutes de cet enregistrement (en rouge : tendance linéaire du signal de pression).

Le but de cet ouvrage est de décrire les connaissances actuelles sur la mécanique des vagues et le contexte dans lequel elles évoluent, en éclairant, autant que possible, les nombreuses zones d'ombres qui demeurent. La propagation des vagues est bien connue grâce aux travaux de Stokes, Airy, Rayleigh et Boussinesq au XIX^{eme} siècle. Sverdrup et Munk (1947) ont véritablement fondé la science moderne des vagues en s'attaquant de front à l'ensemble des processus qui interviennent dans l'évolution des vagues, afin de permettre aux alliés de préparer les débarquements en Afrique du Nord puis en Normandie et dans le Pacifique. Paradoxalement, alors qu'on prévoit assez bien les caractéristiques principales de l'état de la mer, et ses conséquences (forces sur une structures, mouvements d'un navire, portée d'un radar, ...) les mécanismes de génération et dissipation des vagues restent en partie mystérieux.

On assiste actuellement à un regain d'intérêt pour les interactions entres vagues, courants, turbulence, sédiments et atmosphère, depuis l'échelle globale jusqu'à l'échelle de la plage. Il faut souhaiter que cette réconciliation entre les différentes sous-spécialités de la géophysique sera durable car on ne peut comprendre l'environnement marin que dans sa complexité. A ce titre, la "redécouverte" de résultats des années 1970 sur le transport de masse induit par les vagues (par exemple l'importance du transport de Stokes, voir McWilliams et Restrepo 1999), illustre combien est nuisible la spécialisation à outrance des domaines scientifiques et des institutions, mais elle enseigne aussi que les frontières entre les différentes spécialités sont riches en avancées importantes. Nous espérons que, après le rapide tour d'horizon des connaissances actuelles, il ne manquera plus au lecteur de ces lignes qu'un peu de courage pour continuer cette exploration dans la lignée des Stokes, Boussinesq, Munk, Longuet-Higgins, Hasselmann, Zakharov, Phillips et bien d'autres savants moins connus mais sans lequels on ne serait jamais arrivé au niveau de connaissance actuel. Toutefois, ce qui suit pourra parfois paraître mystérieux si l'on a pas déjà dans sa boîte à outils des éléments de calcul différentiel, de mécanique des fluides et une petite pratique de l'analyse dimensionnelle, cette dernière étant le veritable "couteau suisse" du bon physicien.

Suivant le sujet d'intérêt, on pourra consulter les ouvrages suivants (en anglais) pour de précieux compléments,

- Kinsman (1965) sur les principes généraux, et l'observation. Bien que un peu daté cet ouvrage est très bien écrit et facile d'accès.
- Phillips (1977) sur l'ensemble des processus importants pour la couche de surface de l'océan (vagues, ondes internes, turbulence ...)
- Mei (1989) sur les problèmes de propagation des vagues, transport de masse et interactions avec structures, plutôt dans un contexte très côtier ou portuaire

B. MOUVEMENT DES VAGUES : QUELQUES OBSERVATIONS

- Dean et Dalrymple (1991) pour un cours très pédagogique plutôt axé vers l'ingénierie marine.
- Komen et coll. (1994), sur la prévision numérique des vagues, essentiellement au large
- Komar (1998), sur la dynamique littorale et le transport sédimentaire
- Young (1999), essentiellement sur des développements récents concernant la prévision des vagues
- Janssen (2004), pour tout ce qui touche à la génération des vagues par le vent et leur évolution non-linéaire, avec quelques éléments intéressant sur la prévision du vent et des vagues et son évolution très récente.
- le Coastal Engineering Manual (USACE 2002), qui remplace le fameux Shore Protection Manual. Edité par le U.S. Army Corps of Engineers, l'organisme des Etats-Unis en charge de la protection des côtes et des constructions de ports et canaux, cet ouvrage combine un exposé des principes généraux ainsi que des formules empiriques pour le génie côtier. Par ailleurs le CEM est disponible gratuitement sur Internet.

On trouve par ailleurs de nombreux supports pédagogiques sur internet, avec en particulier des applets illustrant le mouvement des ondes. Une liste indicative de sites intéressants sera fournie avec les exercices, pour chaque chapitre.

Nous allons maintenant demander à la marée et aux courants de suspendre leurs mouvements pour nous laisser étudier les vagues séparément. On verra ensuite (chapitres VII et VIII) comment les vagues interagissent avec les autres mouvements de l'océan.

B. Mouvement des vagues : quelques observations

Les vagues dans l'océan sont des mouvements dont l'irrégularité a longtemps freiné l'étude. La figure 1.1 en donne un bon exemple. Alors que jusqu'en 1945 on formulait les observations en terme de vague la plus haute, la variabilité des vagues n'a été introduite dans les méthodes de mesure et de prévision qu'après la seconde guerre mondiale. On distingue deux approches.

1. Analyse vague par vague

La première est une analyse dite "vague par vague" qui a trait aux statistiques de vagues individuelles, définies, car il faut bien une définition, par l'intervalle de temps entre deux instants successifs où, au point de mesure, la surface traverse le niveau moyen en montant ("zero up-crossing"). Le fait de choisir la montée est assez arbitraire, il est bien adapté aux mesures par sondes, en laboratoire, à cause du ménisque qui se forme sur la sonde. Pour chacune de ces vagues on peut définir une période T, une hauteur H, etc. On trouve alors des lois statistiques pour les distributions des hauteurs, comme la probabilité p(H) qu'une vague ait une hauteur entre H et H + dH. En particulier, pour un état de mer statistiquement stationnaire, la surface peut être décrite par une superposition d'un grand nombre de composantes sinusoïdales quasiment indépendantes, et on peut, en première approximation, appliquer le théorème des grands nombres, familier aux statisticiens. Nous y reviendrons. Ainsi, les élévations successives de la surface (qui sont alternativement positives et négatives) suivent une distribution (presque) Gaussienne, et les hauteurs (qui sont toujours positives) suivent (presque) une loi de Rayleigh (figure 5.29),

$$P(H) = \frac{2H}{H_{\rm rms}^2} \exp^{-H^2/H_{\rm rms}^2},$$
(1.1)

sauf dans la zone de défer
lement où on observe une saturation de la hauteur des vagues en fonction de la profondeur (voir chapitre VIII). Une propriété intéressante de cette distribution est fort utile pour les calculs de génie côtier : la probabilité que la hauteur dépasse un seuil \hat{H} est donnée par,

$$P(H > \widehat{H}) = e^{-\left(\widehat{H}/H_{\rm rms}\right)^2}.$$
(1.2)

Cela permet de calculer aussi le seuil de hauteur \hat{H} correspondant à une fraction de vagues données. Ainsi, la hauteur $\hat{H}_{1/3}$ au-dessus de laquelle se trouvent le 1/3 des vagues les plus hautes est $(\ln(3))^{1/2} H_{\rm rms}$ soit environ $1.05 \times H_{\rm rms}$. Par contre il faut intégrer (1.2) pour trouver la grandeur la plus couramment usitée, la moyenne du 1/3 des vagues les plus hautes $H_{1/3}$, souvent aussi noté H_s pour hauteur significative, car elle correspond à l'impression visuelle donnée par la mer, seul moyen de mesure jusqu'aux



FIG. 1.2 – Principe de l'analyse vague par vague : exemple de déplacement mesuré par une bouée houlographe, qui suit le mouvement de la surface, au large de Crozon en mai 2004.



FIG. 1.3 – Distribution de Rayleigh : $dp \times dH(H_v)$ est la probabilité de trouver une vague de hauteur comprise entre H_v et $H_v + dH$. En rouge : le 1/3 des vagues les plus hautes dont la moyenne $H_{1/3}$ est la hauteur significative aussi notée H_s . Par la suite on définira plutôt H_s à partir de l'énergie des vagues, avec des valeurs très proches.



FIG. 1.4 – pression et vitesse au fond, correspondant à la figure 1.1.

années 1940. La moyenne de la fraction 1/x des vagues les plus hautes, toujours pour une distribution de Rayleigh est

$$\left[\left(-\ln(1/x) \right)^{1/2} + \sqrt{\pi} \times \operatorname{erfc} \left[\left(\ln(x) \right)^{1/2} \right] / 2 \right] H_{\mathrm{rms}}$$
(1.3)

avec erfc la fonction d'erreur complémentaire. Soit, pour x = 1/3, $H_{1/3} = 1.4157 \times H_{\rm rms}$.

En effet, on résume souvent la distribution p(H) à 1 ou 2 nombres : la hauteur moyenne $H_{1/3}$ du tiers des vagues les plus hautes, on donne aussi souvent la plus grande des hauteurs, H_{\max} qui dépend de la longueur de l'enregistrement (plus on observe longtemps plus H_{\max} a des chances d'être grand), avec une limite très rarement franchie $H_{\max} = 2.1H_{1/3}$. Au delà de cette valeur on parle de vague scélérate, dont on commence à expliquer l'existence aujourd'hui (White et Fornberg 1998, Janssen 2003).

En pratique, le génie côtier et le génie océanique s'intéressent a des vagues très rares dont la force peut détruire une installation pétrolière, une digue, un bateau. La taille de ces vagues extrêmes détermine l'architecture et la résistance des matériaux à choisir lors de la construction... et donc le prix de la chose. En somme, au moins en haute mer, on sait que si on attend assez longtemps il y arrivera bien une vague assez grande pour détruire n'importe quel ouvrage. Tout est alors question de temps et de probabilités. On s'intéresse ainsi à la vague centenaire, vague dont la hauteur est telle que son temps moyen de retour est cent ans. Aux Pays-Bas, menacés de submersion, la loi impose à certaines digues qui protègent le pays de résister à la vague qui ne reviendrait en moyenne que tous les 10000 ans! Avec de telles exigences, on comprend mieux pourquoi les néerlandais sont très présents dans la recherche contemporaine sur les vagues et le génie côtier.

Pour ces évènements extrêmes (vague annuelle, décénale ... ou décamillénaire) la loi de Rayleigh ne suffit plus car l'état de la mer n'est pas statistiquement homogène à ces échelles de temps et la hauteur des vagues dépend des statistiques d'évènements météorologiques extrêmes (tempêtes, ouragans ...).

2. Analyse spectrale

La seconde méthode, est l'analyse spectrale dont le succès doit beaucoup à la diffusion de l'informatique dans les années 1960 et à l'élégant algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT en anglais). L'enregistrement de hauteur d'eau est décomposé en une superposition d'ondes sinusoidales dont les propriétés sont très bien connues. Le spectre des vagues est alors la répartition de l'énergie sur un ensemble de fréquences et directions. L'aspect directionnel nécessite des mesures complémentaires aux mesures de pression : par exemple la vitesse (figure 1.4).

Alors que les vagues sont irrégulières, le spectre est relativement régulier, il varie assez lentement, en quelques heures. Cette régularité, qui contraste avec le mouvement apparemment irrégulier de la surface, se prête donc à la modélisation numérique et à la prévision. En ne conservant que l'énergie des vagues et leur répartition spectrale pour obtenir une mesure condensée du champ de vagues, on a forcément perdu de l'information : on ne peut pas reconstituer la surface exacte à partir du spectre, en



FIG. 1.5 – Spectre des vagues correspondant à la figure 1.1. Le décrochage brutal pour f > 0.18 Hz vient du fait que l'instrument, posé sur le fond, ne peut mesurer correctement les vagues de haute fréquence car leur signal est fortement atténué avec la profondeur. Ainsi, les pressions et vitesses au fond pour f < 0.18 ont été converties en élévation de surface, alors que pour f > 0.18 il s'agit de pression au fond.



FIG. 1.6 – Spectre directionnel des vagues correspondant à la figure 1.4, et estimé par la méthode de l'entropie maximale (Lygre et Krogstad 1986). L'échelle est arbitraire et linéairement reliée à la densité spectrale d'énergie.

particulier parce qu'on ne garde pas les phases. Pour des phases aléatoires, ce n'est pas très grave, on peut reconstituer une surface qui ressemble beaucoup à la vraie surface, au sens où elle est statistiquement identique. En réalité les phases ne sont pas tout à fait aléatoires, et les vagues sont légèrement asymétriques, plus pentues d'un côté que de l'autre, et avec des crêtes plus pointues que les creux (e.g. Agnon et al. 2005). Pour la plupart des applications ces effets peuvent être négligés (voir Elfouhaily et coll. 2003).

Il est donc important d'avoir à l'esprit ces deux approches. L'analyse vague par vague devient indispensable quand on aborde des phénomènes, tel que le déferlement, liés à des seuils de vitesses ou de courbure de la surface (voir chapitres V.3 et VIII). Dans ce qui suit on utilisera surtout l'analyse spectrale qui est bien adaptée à la prévision des vagues et à l'étude des réflexions d'ondes électromagnétiques par la surface. Il est donc important de connaître les propriétés des ondes sinusoïdales qui sont à la base de l'analyse spectrale.

C. Equations pour la propagation des vagues

Après avoir parlé d'échelle de temps, nous abordons les échelles d'espace et nous allons voir que deux quantités importantes, la longueur d'onde L et la période T sont intimement reliées, et leur relation est très généralement proche de celle que nous allons établir pour des petites vagues. "Petit" est toujours relatif, et il s'agit ici de vagues pour lesquelles le produit ka est faible, avec a l'amplitude et $k = 2\pi/L$ le nombre d'onde, ainsi que le rapport a/D de l'amplitude et de la hauteur d'eau locale $D = H + \overline{\zeta}$, avec H la profondeur et $\overline{\zeta}$ la hauteur moyenne de la surface libre.

Ces petits paramètres sont importants et on les retrouvera souvent. On appelle cambrure le paramètre ka (ce qui est un peu plus expressif que "slope" en anglais). On peut aussi combiner ces deux nombres adimensionnels pour en trouver un autre, la profondeur adimensionnelle kD.

Il se trouve aussi que les vagues se propagent à peu près comme si le fond était localement plat, pour l'instant D sera donc constant. Cette théorie date du XIX^{eme} siècle, elle offre l'avantage d'être linéaire : on peut donc superposer différentes solutions pour décrire l'état réel de la mer, mais surtout elle explique l'essentiel du mouvement des vagues, en particulier au large en l'absence de vent, sans être non plus trop loin de la réalité en zone de déferlement. Pour quantifier les différents phénomènes, il va falloir mettre tout cela en équations. Cela va nous permettre de trouver le mouvement et les variations de pression, dans l'air et dans l'eau, associés aux vagues.

Notre point de départ est la combinaison des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse appliquées à l'océan, cette dernière étant réduite à une divergence nulle de la vitesse car les écoulements à des fréquences inférieurs à 10 Hz sont essentiellement incompressibles (on néglige les ondes sonores). La position est donnée par le vecteur horizontal à deux composantes $\mathbf{x} = (x, y)$ et la position verticale z, et les vitesses sont leurs dérivées temporelles $\mathbf{u} = (u, v)$ et w. On a donc les équations de Navier-Stokes, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement, et la conservation de la masse en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.6}$$

où ρ_w est la masse volumique de l'eau et ∇ est l'opérateur gradient horizontal. On a donc quatre équations scalaires (1.4 a deux composantes) pour les quatre inconnues que sont u, v, w et p. Le problème est donc bien posé en rajoutant les conditions aux limites de continuité des vitesses et des contraintes (pression et tension de cisaillement), et des conditions initiales. Au fond, pour commencer, nous imposerons un glissement libre

$$w = -\mathbf{u} \cdot \nabla h \quad \text{sur} \quad z = -H(\mathbf{x})$$
 (1.7)

qui dans le cas présent où h est constant se simplifie en w = 0 à z = -h. En surface, $z = \zeta$, la surface libre est telle que toute particule qui s'y trouve y reste (la surface est une *ligne de courant*) ce qui s'exprime par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z-\zeta\right) = w - \mathbf{u} \cdot \nabla\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{sur} \quad z = \zeta.$$
(1.8)

A cette condition cinématique s'ajoute les conditions dynamiques, qui, en négligeant la tension en surface (due au vent) et la tension de la surface, se réduisent à la continuité de la pression que nous supposons, pour commencer, égale à une pression atmosphérique connue p_a uniforme,

$$p = p_a \quad \text{sur} \quad z = \zeta. \tag{1.9}$$

Après toutes ces hypothèses simplificatrices, nous allons enfin supposer que ρ_w est constant, ce qui est le cas dans l'océan à quelques millièmes près, et surtout que le mouvement est irrotationnel, de telle sorte que la vitesse dérive d'un potentiel ϕ , tel que $\mathbf{u} = \nabla \phi$ et $w = \partial \phi / \partial z$. Dans cette notation et celles qui suivront les opérateurs différentiels classiques (vecteur gradient ∇ , Laplacien Δ ...) sont restreints au plan horizontal afin de simplifier les notations. Cette hypothèse de mouvement irrotationnel permet de simplifier les équations du mouvement. Elle a été confirmée par toutes les observations de vagues naturelles qui sont effectivement quasi-irrotationnelles, sauf après un déferlement, et dans les couches limite au fond et près de la surface libre. Ailleurs une très faible composante rotationnelle vient de la rotation de la Terre et de la présence de courants rotationnels. Il faut noter que cette condition n'est nécessaire qu'à un instant donné : un mouvement initialement irrotationnel reste irrotationnel se enfin, pour commencer, que les termes visqueux des équations de Navier-Stokes sont négligeables : tout mouvement significatif lié aux vagues fait intervenir des vitesses U et des échelles de longeur L importantes, si bien que le nombre de Reynolds UL/ν est généralement très grand (de l'ordre de 10^4 ou plus).

Toutes ces hypothèses ne sont pas exactement vérifiées et les vagues sont en fait un peu rotationnelles, la viscosité a quelques effets, et la pression atmosphérique n'est pas uniforme. Un traitement rigoureux est possible en comparant ces effets, au mouvement principal que nous allons calculer. On peut alors corriger la solution pour représenter la complexité de tous les phénomènes. On verra cela plus loin.

En remplançant la vitesse par le gradient de ϕ dans (1.4)–(1.5) on obtient

$$\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left|\boldsymbol{\nabla}\phi\right|^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{p}{\rho_w} + gz\right] = 0,\tag{1.10}$$

 et

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left| \nabla \phi \right|^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho_w} + gz \right] = 0.$$
(1.11)

Ces deux équations établissent que la fonction entre crochets est indépendante de la position et n'est une fonction que du temps que l'on peut supposer nulle. On obtient donc l'équation de Bernoulli, qui, appliquée à $z = \zeta$, donne

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\left| \nabla\phi \right|^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{p}{\rho_w} - g\zeta + C(t), \tag{1.12}$$

avec C(t) une fonction du temps. Cela s'écrit aussi

$$p = -\rho_w gz + \frac{1}{2}\rho_w \left(|\mathbf{u}|^2 + w^2 \right) - \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_w C(t).$$
(1.13)

L'équation de Bernoulli exprime donc que la pression est la somme de la pression hydrostatique, de la surpression cinématique ainsi que d'un terme, peut être moins familier, dû aux mouvements instantionnaires, en particulier les vagues. Par la suite on prendra C(t) = 0, mais en présence d'ondes partiellement stationnaires cette constante est non-nulle et d'ordre 2 en cambrure des vagues, ce qui explique les fluctuations de pression par très grands fonds, source des microséismes (Miche 1944a, Longuet-Higgins 1950).

La condition de continuité des vitesses en surface s'écrit

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nabla \phi \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{sur} \quad z = \zeta, \tag{1.14}$$

Par ailleurs l'équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.15}$$

est équivalente à l'équation de Laplace pour ϕ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{pour} \quad -h \le z \le \zeta,$$
 (1.16)

et l'équation de continuité de vitesse vertical sur un fond plat s'écrit

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur} \quad z = -h.$$
 (1.17)

En prenant $\partial(1.12 \text{ pour } z=\zeta)/\partial t + g \times (1.14)$ pour éliminer une partie des termes en ζ on obtient un début d'équation d'onde¹

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = g \nabla \phi \cdot \nabla \zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[\nabla \phi \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z}\right] + C'(t), \quad \text{pour} \quad z = \zeta.$$
(1.18)

Les équations (1.17)-(1.18) fournissent deux conditions aux limites au fond et en surface pour l'équation de Laplace, ce qui permet de trouver des solutions. L'ensemble (1.16)-(1.18) est parfois appelé équation d'Euler. On remarque qu'il est rendu non-linéaire par le membre de droite de la condition en surface.

Avant d'essayer de résoudre cette équation compliquée, une question s'impose : faut-il vraiment garder tous ces termes ? Il faut donc faire l'analyse dimensionnelle de (1.18), ce qui demande de choisir des échelles de temps et d'espace.

Nous allons étudier des ondes, qui sont logiquement caractérisées par une longueur d'onde $L = 2\pi/k$, leur période T, et leur amplitude a. Par ailleurs la profondeur $D = h + \overline{\zeta}$ intervient via la condition à la limite au fond. Enfin, la gravité g est constante et relie donc les échelles de temps aux échelles d'espace. A ce propos on peut rappeler la loi de Reech-Froude : si on change l'échelle de temps du problème d'une facteur α , alors l'échelle d'espace change d'un facteur α^2 , et l'échelle de vitesse change d'un facteur α .

On peut donc mettre de côté l'échelle de temps, toujours reliée aux échelles d'espace par g, et notre problème ne dépend plus que de différents rapports entre les échelles d'espace, comme on a trois échelles a, k et D, on peut former deux rapports indépendants à choisir parmi la cambrure $\varepsilon_1 = ka$, l'amplitude relative à la profondeur $\varepsilon_2 = a/D$, et la profondeur adimensionnelle $\mu = kD$. La combinaison des deux derniers donne le nombre d'Ursell, $Ur = \varepsilon_2/\mu^2$ (Ursell 1953). On utilise généralement ε_1 et Ur. On verra ci-dessous qu'un nombre de Froude $\alpha = ga/C^2$ avec C la vitesse de phase des vagues, peut aussi être intéressant (Kirby 1998).

D. Petites vagues au dessus d'un fond plat : la théorie d'Airy

1. Solution

On cherche une solution de la forme

$$\phi = \mathcal{R}\left(\widetilde{\phi}\left(z,t\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right),\tag{1.19}$$

où $\mathcal{R}(a)$ représente la partie réelle de a. Cela donne l'équation de Helmholz en remplaçant dans l'équation de Laplace,

$$-k^2 \widetilde{\phi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.20}$$

Toute solution est de la forme

$$\phi(z,t) = A(t)\cosh(kz) + B(t)\sinh(kz)$$
(1.21)

¹Attention, quand on calcule $\partial(1.12)/\partial t$ sur $z = \zeta$, il ne faut pas oublier que ζ est une fonction du temps.

La condition à la limite au fond impose

$$\widetilde{\phi}(z,t) = \Phi(t) \, \frac{\cosh\left(kz + kh\right)}{\cosh\left(kD\right)}.\tag{1.22}$$

Jusqu'ici les seules hypothèses faites sont que l'écoulement est incompressible (hypothèse H1) et non-visqueux (H2), le mouvement est irrotationnel (hypothèse H3), que le fond est plat (H4) et que le potentiel des vitesses varie spatialement comme une sinusoide (H5). Nous allons maintenant devoir utiliser (1.18) ce qui demande une analyse dimensionnelle. Nous suivons ici le raisonnement de Kirby (1998). Posons $x' = k_0 x$, $y' = k_0 y$, $t' = k_0 C_0 t$, $\zeta' = \zeta/a$, ce qui donne $\phi' = \phi/\phi_0$ avec $\phi_0 = C\alpha/k$ et le nombre de Froude pour les vagues $\alpha = ga/C^2$. Pour la coordonnée verticale on se donne une échelle Z, donc z' = z/Z. La condition à la limite en surface (1.18) devient donc

$$\frac{\partial^{2} \phi'}{\partial t'^{2}} + \frac{g}{Zk_{0}^{2}C_{0}^{2}} \frac{\partial \phi'}{\partial z'} = \alpha \nabla \phi' \cdot \nabla \zeta' - \frac{a}{Z} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} \frac{\partial^{2} \phi'}{\partial z' \partial t'} \\
- \left(1 + \frac{akC}{Z} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial z'}\right) \alpha \left[\nabla \phi' \cdot \frac{\partial \nabla \phi'}{\partial t'} + \frac{1}{k_{0}^{2}Z^{2}} \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial^{2} \phi'}{\partial t' \partial z'}\right] + \frac{C'(t)}{\phi_{0}k_{0}^{2}C_{0}^{2}}, \quad \text{pour} \quad z' = \frac{a}{Z} \zeta'.$$
(1.23)

Si l'on choisit Z = 1/k, alors $\alpha = a/Z = \varepsilon_1$ et il suffit de prendre $\varepsilon_1 \ll 1$. Si on choisit plutôt Z = D, alors il faudra aussi supposer $\varepsilon_2 = a/D \ll 1$. En supposant, à la fois $\varepsilon_1 \ll 1$ et $\varepsilon_2 \ll 1$ on peut donc négliger les termes du membre de droite de (1.23). Il conviendra de vérifier ensuite que la solution vérifie bien ces hypotèses.

Négliger les termes de droites revient à linéariser (1.18). Ayant supposé $\varepsilon_1 \ll 1$ et $\varepsilon_2 \ll 1$, on peut aussi ramener (1.18) à z = 0 plutôt que $z = \zeta$ par un développement de Taylor. Au premier ordre en $\varepsilon = \max{\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$, on a donc

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur} \quad z = 0.$$
(1.24)

En y remplaçant ϕ par (1.22) on a clairement une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + gk \tanh\left(kD\right) \Phi = 0, \qquad (1.25)$$

qui a pour solution

$$\Phi(t) = \mathcal{R}\left(\Phi_{\mathbf{k}} e^{i\sigma t}\right), \qquad (1.26)$$

avec la relation de dispersion, donnée par Laplace (1776),

$$\sigma^2 = gk \tanh\left(kD\right). \tag{1.27}$$

En définissant la phase de l'élévation de surface

$$\Theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t + \Theta_0, \tag{1.28}$$

avec Θ_0 une constante entre 0 et 2π , et l'amplitude

$$a = \mathrm{i}\frac{\sigma}{g}\Phi_{\mathbf{k}},\tag{1.29}$$

l'élévation, les vitesses horizontales et verticales et la pression de la solution d'Airy² (1841), sont données par les relations de polarisation suivantes,

$$\zeta = a\cos\Theta,\tag{1.30}$$

$$\mathbf{u} = a \frac{\mathbf{k}}{k} \sigma \frac{\cosh\left(kz + kh\right)}{\sinh\left(kD\right)} \cos\Theta,\tag{1.31}$$

²Bien que Laplace, Cauchy et Poisson aient donné tous les éléments de cette théorie plusieurs décennies avant Airy, il apparaît que ce dernier a été le premier à résoudre le problème d'une onde monochromatique se propageant. Poisson a en particulier traité tout un ensemble de problèmes bien plus complexes, dont les ondes stationnaires et les ondes à symétrie circulaire. A ce sujet on pourra lire l'excellent article de Craik (2004).

$$w = a\sigma \frac{\sinh\left(kz + kh\right)}{\sinh\left(kD\right)} \sin\Theta,\tag{1.32}$$

$$p = \overline{p}^{H} + \rho_{w} g a \frac{\cosh\left(kz + kh\right)}{\cosh\left(kD\right)} \cos\Theta, \qquad (1.33)$$

avec la pression hydrostatique moyenne $\overline{p}^H = -\rho_w g(z - \overline{\zeta}) + \overline{p}_a$ où p_a est la pression atmosphérique. Par ailleurs on a aussi,

$$\phi = \frac{a}{k}\sigma \frac{\cosh\left(kz+k\right)}{\sinh\left(kD\right)}\sin\Theta.$$
(1.34)

On obtient aussi les déplacements des particules d'eau, en intégrant la vitesse dans le temps, en première approximation (au premier ordre en ε), on a le déplacement horizontal

$$\widetilde{\xi}_h = -a \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\cosh\left(kz + kh\right)}{\sinh\left(kD\right)} \sin\Theta,\tag{1.35}$$

et vertical

$$\widetilde{\xi}_3 = a \frac{\sinh\left(kz + kh\right)}{\sinh\left(kD\right)} \cos\Theta,\tag{1.36}$$

Comme nous l'avons vu, il s'agit d'une solution approchée, alors que von Gerstner (1809) avait déterminé une solution qui satisfait exactement la condition p = 0 à la surface, mais avec un rotationnel non nul. Stokes (1847) a étendu la solution d'Airy pour prendre en compte les termes non-linéaires de l'équation (1.18), ce qui améliore l'accord de la théorie avec les observations de vagues. Dans l'océan profond, l'ensemble des observations montrent que les vagues sont quasi-irrotationnelles et sont bien décrites par les théories de Airy et Stokes (voir par exemple Thornton et Kraphol, 1974). Il a aussi été montré que le développées pour un calcul numérique des différents ordres d'approximation (e.g. Dean 1965).

2. Propriétés cinématiques : influence du paramètre kD

Le mouvement des vagues présente une vitesse maximale en surface qui s'atténue vers le fond avec une distance typique Z, qui, en eau profonde est $1/k = L/2\pi$, de telle sorte que les vagues n'ont plus aucune influence significative à des profondeurs supérieures a L/2, la moitié de la longueur d'onde.

a. Ondes d'Airy en eau profonde

Les termes en kD se simplifient quand la profondeur est assez importante (disons $kD > \pi$, ce qui correspond à une atténuation de 96% car $\exp(\pi) \simeq 0.04$). Ainsi la relation de dispersion devient

$$\sigma^2 = gk, \tag{1.37}$$

les vitesses et pression s'écrivent

$$\mathbf{u} = a\mathbf{k}\frac{\sigma}{k}\mathrm{e}^{kz}\cos\Theta\tag{1.38}$$

$$w = a\sigma e^{kz} \sin \Theta. \tag{1.39}$$

$$p = \overline{p}^H + \rho_w gae^{kz} \cos\Theta. \tag{1.40}$$

et les déplacements (7.23)-(7.25) deviennent

$$\widetilde{\xi}_h = -a \frac{\mathbf{k}}{k} \mathrm{e}^{kz} \sin\Theta, \qquad (1.41)$$

$$\widetilde{\xi}_3 = a \mathrm{e}^{kz} \cos \Theta, \tag{1.42}$$

qui est l'équation paramétrique d'un cercle de diamètre $2ae^{kz}$. En première approximation, les particules suivent donc des trajectoires circulaires dont le diamètre diminue avec la profondeur. On l'aura compris, tout cela découle des propriétés des fonctions hypeboliques cosh, sinh et tanh, dont il vaut mieux se remémorer les propriétés (figure 1.7).



FIG. 1.7 – Principales fonctions hyperboliques.

b. Ondes d'Airy en profondeur intermédiare

Pour des profondeurs moins importantes la vitesse au fond n'est plus nulle et dans ce cas les trajectoires sont des ellipses, dont le grand axe est horizontal et de mesure $2a\cosh(kz + kh)/\sinh(kD)$. Le petit axe de l'ellipse, vertical et de mesure $2a\sinh(kz + kh)/\sinh(kD)$, décroît de 2a en surface à 0 au fond.

c. Ondes d'Airy en eau peu profonde

Pour de très faibles profondeurs ou bien pour des vagues très longues $(kD\ll 1),$ la relation de dispersion devient

$$\sigma^2 = ghk^2, \tag{1.43}$$

les vitesses et pression s'écrivent

$$\mathbf{u} = a\mathbf{k}\frac{\sigma}{k\sinh(kD)}\cos\Theta\tag{1.44}$$

$$w = a\sigma \frac{(kz+kh)}{(kD)} \sin\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t\right).$$
(1.45)

$$p = \overline{p}^H + \rho_w ga \cos \Theta = p^H, \qquad (1.46)$$

la pression est donc hyrostatique dans le cas peu profond. C'est en particulier le cas des ondes de marée. Pour les tsunamis c'est preque vrai aussi.

Les déplacements (7.23)-(7.25) deviennent

$$\widetilde{\xi}_h = -a \frac{\mathbf{k}}{k \sinh(kD)} \sin\Theta, \qquad (1.47)$$

$$\widetilde{\xi}_3 = a \frac{(kz+kh)}{(kD)} \cos \Theta, \qquad (1.48)$$



FIG. 1.8 – (a) Profil de vitesse de part et d'autre de la crête d'une vague d'Airy (x = 0), et (b) champ de vitesse (la ligne blanche est la position de la surface libre). Ces illustrations correspondent à une houle d'amplitude 3 cm, 1.5 s de période par 3 m de profondeur, soit une longueur d'onde de 3.5 m, et kD = 3.4.

3. Et dans l'air?

Nous avons calculé le mouvement et la pression dans l'eau. Or on peut faire les mêmes hypothèses, incompressibilité et irrotationalité, dans l'air pour obtenir l'équation de Laplace (1.16) dans l'air. La solution s'obtient de la même façon. La seule différence est que la condition au fond est remplacée par une condition $\mathbf{u} \to 0$ pour $z \to \infty$. Le mouvement de l'air au-dessus des vagues est donc semblable à celui au-dessous, dans la limite de la profondeur infinie $(kD \gg 1)$. La pression d'air induite par les vagues décroît donc exponentiellement vers le haut. Enfin, la dérive de Stokes existe aussi dans l'air, dans la direction de propagation des vagues.

Ces résultats ont été confirmés par Elliot (1972) qui a tout de même trouvé une atténuation plus rapide, au cause du cisaillement du vent moyen, négligé ici. En prenant en compte le cisaillement, au lieu de l'équation de Laplace on verra au chapitre V que l'on obtient l'équation d'Orr-Sommerfeld. Par ailleurs la discontinuité des vitesses à la surface (figure 1.8.a) est absente en présence de viscosité, et le profil réel contient une couche limite. Ce fort cisaillement est imoportant pour l'atténuation de la houle à l'échelle des bassins océaniques.

4. Dispersion et énergie

La vitesse à laquelle la crête des vagues progresse est appelée vitesse de phase et est donnée par le rapport $C = \sigma/k$ de la pulsation et du nombre d'onde, qui est égal au rapport L/T de la longueur d'onde sur la période. D'après la relation de dispersion (1.27),

$$C = \frac{\sigma}{k} = \left[\frac{g}{k} \tanh\left(kD\right)\right]^{1/2}.$$
(1.49)

Les vagues sont dispersives : leur vitesse de phase est une fonction de leur longueur d'onde, et les vagues les plus longues se propagent plus vite que les vagues les plus courtes. Ainsi, si une perturbation initiale est la somme de plusieurs ondes d'Airy de différentes longueurs d'ondes, les plus longues seront les premières à atteindre un observateur loitain. Ce n'est plus le cas dans la limite des faibles profondeurs et grandes longueurs d'onde ($kD \ll 1$) pour lesquelles C tend vers (gD)^{1/2} indépendamment de k. Sur la figure 1.9, cela se traduit par une pente constante (par exemple pour D = 10 m et T > 5 s).



FIG. 1.9 – Longueur d'onde en fonction de la période, pour des vagues linéaires, en absence de courant

L'énergie des vagues est constament échangée entre énergie potentielle E_p et énergie cinétique E_c . Intégrée sur la verticale et moyennée sur une période (cette moyenne est notée $\langle \cdot \rangle$), on a

$$E_{p} = \left\langle \int_{0}^{\zeta(\mathbf{x},t)} \rho_{w} gz dz \right\rangle = \rho_{w} g \left\langle \frac{1}{2} \zeta^{2} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2} \rho_{w} ga^{2} \left\langle \cos^{2} \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t \right) \right\rangle$$
$$= \frac{1}{4} \rho_{w} ga^{2}$$
(1.50)

$$E_{c} = \left\langle \int_{-h}^{\zeta(\mathbf{x},t)} \frac{1}{2} \rho_{w} \left(|\mathbf{u}|^{2} + w^{2} \right) \right\rangle$$

$$\approx \frac{1}{2} \rho_{w} \left(\frac{agk}{\sigma \cosh(kD)} \right)^{2} \left[\int_{-h}^{\overline{\zeta}} \cosh^{2}\left(kz + kh\right) dz \left\langle \cos^{2}\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t\right) \right\rangle$$

$$+ \int_{-h}^{\overline{\zeta}} \sinh^{2}\left(kz + kh\right) dz \left\langle \sin^{2}\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t\right) \right\rangle \right]$$

$$\approx \frac{1}{4} \rho_{w} \left(\frac{agk}{\sigma \cosh(kD)} \right)^{2} \int_{-h}^{\overline{\zeta}} \cosh\left(2kz + 2kh\right) dz$$

$$\approx \frac{1}{4} \rho_{w} \left(\frac{agk}{\sigma \cosh(kD)} \right)^{2} \frac{\sinh 2kD}{2k}$$

$$\approx \frac{1}{4} \rho_{w} ga^{2}, \qquad (1.51)$$

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2}\rho_w g a^2 = \rho_w g E,$$
 (1.52)

avec $E = a^2/2$, la variance de l'élévation de la surface. En première approximation, nous donc trouvé que les énergies cinétiques et potentielles, E_c et E_p , sont égales en moyenne sur une période.



FIG. 1.10 – Vitesse de groupe pour des vagues linéaires

La propagation des vagues est associée à un flux d'énergie. En effet, les vitesses et pressions (1.31) et (1.33) sont en phase, si bien qu'une colonne d'eau effectue un travail W sur sa voisine située dans la direction de propagation,

$$W = \left\langle \int_{-h}^{\zeta} pudz \right\rangle$$

= $\rho_w ga \frac{agk}{\sigma} \left\langle \cos^2 \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t \right) \right\rangle \int_{-h}^{\zeta} \frac{\cosh^2 \left(kz + kh \right)}{\cosh^2 kD} dz$
= $E \frac{gk}{\sigma \cosh^2 kD} \int_{-h}^{\overline{\zeta}} \frac{1}{2} \left[\cosh \left(2kz + 2kh \right) + 1 \right] dz$
= $E \frac{gk}{\sigma \cosh^2 kD} \left(\frac{\sinh 2kD}{4k} + \frac{D}{2} \right)$
= $C_g E$ (1.53)

avec

$$C_g = \frac{\sigma}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{kD}{\sinh 2kD} \right) = C \left(\frac{1}{2} + \frac{kD}{\sinh 2kD} \right).$$
(1.54)

W est un flux d'énergie et C_g est la vitesse de groupe qui est donc la vitesse moyenne de cette énergie. Le flux d'énergie total induit par les vagues comprend, outre le travail des contraintes, le flux advectif $u \left[\rho_w g z + 0.5 \left(u^2 + w^2 \right) \right]$. En absence de courant moyen cette partie est négligeable. Le nom de vitesse de groupe vient du fait que $C_g = \partial \sigma / \partial k$ est la vitesse de propagation d'un groupe de vagues contenant des fréquences différentes mais proches. En effet, la superposition de deux ondes monochromatiques de même amplitude et direction donne une élévation de surface

$$\zeta = a \left[\cos \left(kx - \sigma t \right) + \cos \left(\left(k + \Delta k \right) x - \left(\sigma + \Delta \sigma \right) t \right) \right], \tag{1.55}$$

qui s'écrit aussi

$$\zeta = a\cos\left(\Delta kx - \Delta\sigma t\right)\cos\left(\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\sigma + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)t\right).$$
(1.56)

Le premier facteur donne l'enveloppe du groupe, de longueur d'onde $2\pi/\Delta k$ et période $2\pi/\Delta\sigma$, qui se propage à la vitesse $c' = \Delta\sigma/\Delta k$, qui dans la limite $\Delta k \to 0$ est $C_q = \partial\sigma/\partial k$.

On remarque, pour $kD \to \infty$, l'équation (1.54) donne, $C_g = \sigma/(2k) = C/2$. Ainsi en eau profonde les groupes vont à une vitesse qui est la moitié de la vitesse de phase. Par contre, en eau peu profonde $(kD \ll 1)$, $C_g = C$: comme toutes les vagues vont à la même vitesse (elle ne sont plus dispersives), les groupes vont à la même vitesse que les vagues. On verra plus loin que cela n'est vrai que pour les vagues linéaires, car la vitesse de phase dépend aussi de l'amplitude des vagues.

5. Energie et puissance

Le flux d'énergie donné par l'équation (1.53) est la puissance rayonnée par unité de longueur. Pour des vagues régulières de hauteur 2 m par 15 m de fond, et de période 12 s, on trouve $W \approx 50 \text{ kW m}^{-1}$. Ainsi, pour de telles vagues arrivant vers une plage, sur chaque mètre le long de la plage 50 kW sont dissipés en chaleur, soit 5 MW pour 100 mètres, ce qui correspond à la puissance crête de deux éoliennes de 150 m de haut. Ce chiffre, pour des vagues relativement modestes, illustre leur forte puissance. Cette puissance est malheureusement difficilement utilisable, par exemple pour produire de l'électricité, mais de nouvelles techniques semblent prometteuses.

6. Dérive de Stokes

Les déplacements de particules fluides sont dominés par les oscillations périodiques ξ_h et ξ_3 . Cependant, pour de nombreuses applications cette première approximation n'est pas suffisante. Afin de l'améliorer il faut examiner les termes qui ont été négligés. Rigoureusement, la position $(\mathbf{x}(t), z(t))$ d'une particule fluide est la somme des vitesses à ses positions successives (voir par exemple Phillips 1977, p. 43),

$$(\mathbf{x}(t), z(t)) = (\mathbf{x}(0), z(0)) + \int_0^t (\mathbf{u}(\mathbf{x}(t'), z(t'), t'), w(\mathbf{x}(t'), z(t'), t')) \, \mathrm{d}t'.$$
(1.57)

Au premier ordre en cambrure, la vitesse est simplement la vitesse à la position initiale, soit $(\mathbf{u}(\mathbf{x}(t'), z(t'), t'), w(\mathbf{x}(t'), z(t'), t')) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}(0), z(0), t'), w(\mathbf{x}(0), z(0), t'))$. En intégrant, on trouve $(\mathbf{x}(t), z(t)) = (\mathbf{x}(0), z(0)) + (\xi_h, \xi_3)$ données par (7.23)–(7.25). Au second ordre, parce que la particule est légèrement déplacée, sa vitesse doit être corrigée. On utilise le développement limité suivant,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t'), z(t'), t') = \mathbf{u}(\mathbf{x}(0), z(0), t')
+ \mathbf{u}_{2}(\mathbf{x}(0), z(0), t')
+ \xi_{h}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\xi_{h}(0), \xi_{3}(0), t') + \xi_{3}(t) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(\xi_{h}(0), \xi_{3}(0), t') + O(\varepsilon^{3}), \quad (1.58)$$

où \mathbf{u}_2 est le gradient de ϕ_2 , terme d'ordre 2 dans la solution de (1.18), ce qui peut s'avérer assez compliqué à calculer. On utilisera la propriété que la moyenne temporelle de \mathbf{u}_2 est nulle pour négliger ce terme, et on s'intéresse aux deux derniers termes.

On remarque d'abord que $\xi_h(t)$ est en quadrature avec **u**. Or $\nabla \mathbf{u}$ est aussi en quadrature avec **u**. Le produit de ces deux termes qui sont en phase a donc une moyenne non-nulle. De même, ξ_3 est en phase avec $\partial \mathbf{u}/\partial z$. Il se trouve que ces deux produits sont égaux, chacun contribuant la moitié de la dérive de Stokes,

$$\mathbf{U}_s \equiv \int_0^T \mathbf{u} \left(\mathbf{x}(t'), z(t'), t' \right) \mathrm{d}t' = \sigma \mathbf{k} a^2 \frac{\cosh(2kz + 2kh)}{2\sinh^2(kD)},\tag{1.59}$$

qui tend vers

$$\mathbf{U}_s = \sigma \mathbf{k} a^2 \exp(2kz),\tag{1.60}$$

en eau profonde $(kD \gg 1)$. Cette vitesse U_s est donc une vitesse résiduelle de dérive d'une particule, dans le sens de propagation des vagues. C'est une vitesse Lagrangienne moyenne. Le déplacement d'une particule d'eau n'est donc pas tout à fait périodique (figure 1.11). Cette vitesse est fortement atténuée sur la verticale car elle décroit deux fois plus vite que la vitesse orbitale.

Il est remarquable que l'on a pu calculer une quantité d'ordre 2 à partir de la solution d'ordre 1. En d'autres termes la dérive de Stokes est une propriété quadratique, mais pas une propriété nonlinéaire : même les ondes rigoureusement linéaires induisent une dérive de Stokes.



FIG. 1.11 – Illustration du déplacement d'une particule fluide au second ordre en cambrure. Au mouvement orbital se superpose la dérive de Stokes.

Cette vitesse de dérive donne un transport de masse qui, intégré sur la verticale, est la pseudoquantité de mouvement des vagues,

$$\mathbf{M}^{w} = \rho_{w} \int_{-h}^{0} \mathbf{U}_{s} \mathrm{d}z = \frac{\cosh(kD)}{2\sinh(kD)} \rho_{w} \sigma a^{2} = \rho_{w} g \frac{a^{2}}{2C} = \frac{E_{t}}{C}$$
(1.61)

avec E l'énergie des vagues par unité de surface, comme nous allons le voir. Cette dernière égalité est très générale pour la plupart des mouvements ondulatoires, semblable à l'expression de la quantité de mouvement d'un photon p = E/c. Cette égalité, calculée à partir de la solution d'Airy, n'est plus vraie lorsqu'on prend en compte les corrections liées à la non-linéarité des vagues. Par contre, l'égalité $\mathbf{M}^w = 2E_c/C$ reste vraie pour toute vague périodique irrotationnelle (Longuet-Higgins 1984, voir chapitre II).

Enfin, ce transport de masse peut aussi se calculer à partir de la vitesse Eulérienne en intégrant du fond jusqu'à la surface,

$$\mathbf{M}^{w} = \rho_{w} \int_{-h}^{\zeta} \mathbf{u} dz = \rho_{w} \int_{-a}^{a} \mathbf{u} dz$$
(1.62)

Il y a ainsi deux points de vue sur la dérive de Stokes. Cette dernière équation donne le point de vue Eulérien, avec une dérive concentrée uniquement entre les creux et les crêtes des vagues. Et le point de vue Lagrangien pour lequel la dérive est distribuée sur l'ensemble de la colonne d'eau. Suivant les applications on choisira l'un ou l'autre.

7. Ce qu'il faut retenir

Les quelques formules du paragraphe 1 concernant les distributions de hauteur de vagues aléatoires peuvent être très utiles.

Pour les ondes régulières, nous avons obtenu les principales propriétés des ondes élémentaires que sont les ondes d'Airy, résumées dans le tableau (1.1). Du fait de la linéarité des équations utilisées, toute superposition d'ondes d'Airy est solution des équations. Les vitesses et pressions sont donc la combinaison linéaire des vitesses et pressions des ondes d'Airy, proportionnelles aux amplitudes a de chacune des composantes. On verra au chapitre suivant qu'il en est généralement de même des propriétés de second ordre comme l'énergie et la dérive de Stokes, proportionnelles à la variance d'élévation de surface $E = a^2/2$ de chacune des composantes. Ces propriétés découlent d'une série d'hypothèses, listée dans le tableau 1.2 et que nous allons discuter dans les chapitres suivants. Cela nous permettra d'étendre la théorie d'Airy et ainsi de déterminer à partir du forçage toutes les caractéristiques des vagues. En effet, nous avons déterminé ici les modes propres des équations du mouvement linéarisées : ce sont des ondes libres. Toutefois le forçage est nécéssaire pour que ces ondes existent, et la dissipation permet d'obtenir un équilibre.

8. Pour aller plus loin : extensions de la théorie d'Airy

Que se passe-t-il si l'on renonce à certaines de ces hypothèses H1–H10? Dans quelles conditions faut-il le faire ?

Profondeur :	cas général	$kD\gg 1$	$kD\ll 1$
relation de dispersion	$\sigma^2 = gk \tanh(kD)$	$\sigma^2 = gk$	$\sigma^2 = gDk^2$
vitesse de phase	$C = \sigma k = \left[g \tanh(kD)/k\right]^{1/2}$	$C = \left(g/k\right)^{1/2} = g/\sigma$	$C = (gD)^{1/2}$
vitesse de groupe	$C_g = C\left(0.5 + \frac{kD}{\sinh(2kD)}\right)$	$C_g = C/2$	$C_g = C$
Propriétés linéaires $(z < \zeta)$			
vitesse horizontale	$\mathbf{u} = a \frac{\mathbf{k}}{k} \sigma \frac{\cosh(kz + kh)}{\sinh(kD)} \cos \Theta$	$\mathbf{u} = \frac{a\mathbf{k}\sigma}{k} \mathrm{e}^{kz} \cos\Theta$	$\mathbf{u} = \frac{a\mathbf{k}\sigma}{k^2D}\cos\Theta$
vitesse verticale	$w = a\sigma \frac{\sinh(kz+kh)}{\sinh(kD)}\sin\Theta$	$\mathbf{u} = a\sigma \mathrm{e}^{kz} \sin \Theta$	$w = \frac{z+h}{h}a\sigma\sin\Theta$
Propriétés de second ordre :			
Dérive de Stokes	$\mathbf{U}_s = \sigma \mathbf{k} E \frac{\cosh(2kz + 2kh)}{\sinh^2(kD)}$	$\mathbf{U}_s = 2\sigma \mathbf{k} E \mathrm{e}^{2kz}$	$\mathbf{U}_s = \sigma \mathbf{k} E / (kD)^2$

TAB. 1.1 – Principaux résultats de la théorie d'Airy et limites en eau profonde et peu profonde

Hypothèse	raison	conséquence
H1. incompressible	$u \ll C_{ m son}$	$\nabla \cdot \mathbf{u} + \partial w / \partial z = 0$
H2. non-visqueux	Nombre de Reynolds élevé	pas de contraintes visqueuses
H3. irrotationnel	mouvement transmis par pression (H2)	$\mathbf{u} = \mathbf{\nabla}\phi, w = \partial\phi/\partial z$
H4. fond plat	pentes des fonds marins souvent faibles	$w = 0 \operatorname{sur} z = -H$
H5. onde sinusoidale	fonction de base pour Fourier	$\phi \propto \cosh(kz + kH)$
H6. p_a constant à $z = \zeta$	$ ho_a \ll ho_w$	
H7. pas de tension de surface	$\gamma \ll g/k^2$ pour $L \gg 0.1$ m (eau propre)	
H8. $\varepsilon_1 = ka \ll 1$	$\varepsilon_1 < 0.14$ pour des vagues régulières	
H9. $\varepsilon_2 = a/D \ll 1$	facilité du calcul	
H10. pas de courant moyen	souvent $U \ll C$	
H11. densité constante	$\rho'/\rho_w < 0.03$ (eau seule)	
H12. pas de force de Coriolis	$f_3 \ll \sigma$	

TAB. 1.2 – Hypothèses faites pour arriver à la théorie d'Airy. $C_{\rm son}$ désigne la vitesse du son dans l'eau, de l'ordre de 1500 m s⁻¹, et U la vitesse du courant moyen. Enfin ρ' désigne les fluctuations de densité de l'eau par rapport à la valeur moyenne ρ_w , et γ est la tension superficielle, telle que $\gamma \rho_w(R_1 + R_2)$ est la surpression sous la surface lorsque ses rayons de courbure sont R_1 et R_2 , comptés positifs pour une surface convexe côté air.

- H1. Sur ce plan on est tranquille, sauf à considérer des écoulements assez peu naturels. On gardera toujours l'hypothèse H1.
- H2. Dans les couches limites en surface et surtout au fond, il faudra introduire la viscosité moléculaire ou une viscosité turbulente. Toutefois ces couches limites ont une épaisseur de l'ordre de $\delta = (\nu/\sigma)^{1/2}$ soit moins d'un millimètre pour la viscosité cinématique de l'eau $\nu = 4 \times 10^{-6}$ m² s⁻¹, et une période de vague T > 1 s (valeur réaliste pour la couche de surface côté eau, voir Banner et Peirson 1998), et de l'ordre de quelques centimètres pour une viscosité turbulente réaliste dans la couche limite de fond. Cette viscosité, aussi faible soit-elle, a des effets importants aux voisinages des couches limites.
- H3. Dès que l'écoulement est visqueux, une faible vorticité diffuse lentement dans l'ensemble de la colonne d'eau et dans l'air à partir des couches limites au fond et en surface (Longuet-Higgins 1953, Weber et Førland 1991). Par ailleurs, l'écoulement est rotationnel du fait de la rotation de la Terre (voir H12).
- H4. La condition à la limite au fond devient $-\nabla \phi \cdot \nabla h = \partial \phi / \partial z$ (cas non-visqueux), et elle ne peut être satistifaite exactement qu'en présence d'au moins deux trains d'onde, une onde incidente et une onde réfléchie. Pour une pente faible la réflexion est généralement faible, et le mouvement des vagues est correctement donné par une approximation "WKBJ" : en remplaçant la phase Θ par une fonction $S(\mathbf{x}, t)$ avec $\mathbf{k} = \nabla S$ et $\sigma = -\partial S / \partial t$ (voir chapitre VI). Dans ce contexte "faible" signifie que les effets de réfraction ou diffraction ne conduisent pas à une variation relative imoportante de l'amplitude à l'échelle de la longueur d'onde. Une approximation plus précise de la relation de dispersion pour des vagues sur une pente régulière a été donnée par Ehrenmark (2005), sous la forme $\sigma^2 = gk \tanh(kh\alpha/\tan\alpha)$, avec α l'angle entre le fond et l'horizontale. Mais la correction reste faible, environ 4% pour $\alpha = 10^{\circ}$. Pour des pentes fortes, la réflexion peut être importante et par ailleurs la séparation des variables \mathbf{x} et z n'est plus possible. Le potentiel des vitesse peut être obtenu avec des modèles numériques relativement complexes (par exemple Athanassoulis et Belibassakis 1999, en 2D, et Belibassakis et coll. 2001, en 3D).
- H5. Justement, pour des pentes faibles l'onde n'est sinusoïdale que localement, et pour des pentes fortes l'onde peut aussi être fortement amortie à l'échelle de la longueur d'onde (voir Magne et al. 2007).
- H6. Une variation de la pression à l'échelle de la longueur d'onde peut conduire à une croissance ou une atténuation des vagues, suivant la phase relative de la pression atmosphérique et de l'élévation de la surface. Cet aspect sera détaillé au chapitre V.
- H7. Du fait de la tension de surface, la pression sous la surface est augmentée de $-\gamma'\partial^2\zeta/\partial x^2 + \partial^2\zeta/\partial y^2$), ce qui modifie la relation de dispersion pour donner $\sigma^2 = (gk + \gamma k^3) \tanh(kh)$. Cette modification est négligeable pour les vagues de longeur d'onde supérieure à quelques décimètres.
- H8. Les effets des non-linéarités liées à $\varepsilon_1 \neq 0$ sont très variés et seront abordés aux chapitres (II) et (V). En particulier un train de vagues monochromatiques peut être instable, avec l'apparition de vagues de grande amplitude (vagues scélérates), et des interactions entre trains de vagues avec échange d'énérgie et de quantité de mouvement.
- H9. Les effets des non-linéarités liées à $\varepsilon_2 \neq 0$ sont importants près des côtes, où ils se combinent aux effets liés à $\varepsilon_1 \neq 0$. Les trains d'ondes peuvent changer de forme avec une variation de la période, l'apparition d'harmoniques, etc ... (voir chapitre VI). D'autres trains d'ondes sont au contraire stables, on parle de quasi-solitons.
- H10. Les lois de la physique étant invariantes par changement de référentiel Galiléen, la présence d'un courant uniforme **U** ne fait qu'introduire un décalage de fréquence (effet Fizeau-Doppler) et tous les résultats établis dans ce chapitre restent valables en remplaçant Θ par $\Theta_D = \Theta + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$. On peut alors définir une pulsation absolue,

$$\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + \left[gk \tanh\left(kD\right)\right]^{1/2}.$$
(1.63)

Pour un courant $\mathbf{U}(z)$ variable sur la verticale seulement, et dans la limite $\varepsilon_1 \ll 1$ et $\varepsilon_2 \ll 1$, cette relation de dispersion se généralise sous la forme,

$$\omega \equiv \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_A \tag{1.64}$$

avec la vitesse d'advection donnée par Kirby et Chen (1989),

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{k} \cdot \int_{-h}^{\overline{\zeta}} \mathbf{U}(z) \frac{2k \cosh\left[2k(z+h)\right]}{\sinh(2kD)} \mathrm{d}z.$$
(1.65)

Enfin, pour des variations de U sur l'horizontale aussi, on trouve le même type de phénomènes que pour des variations de profondeur, avec, en plus, un échange d'énergie entre les vagues et le courant. Ces aspects sont abordés en détail au chapitre (VII).

- H11. En présence d'une stratification liée à la structure thermohaline de l'océan, les ondes étudiées ici ne sont que le mode externe d'une famille d'ondes comprenant aussi des modes internes. Du fait de la faible non-linéarité des équations du mouvement, ces différents modes sont couplés et on observe des échanges d'énergie entre vagues et ondes internes (Thorpe 1966). Cette thématique, relativement peu explorée n'est pas traitée dans le présent ouvrage, mais elle devrait y être abordée dans des versions ultérieures. Le lecteur curieux pourra se référer à Osborne et Burch (1980) ou Kudryavtsev (1994). Par ailleurs la stratification peut aussi venir de la concentration en air près de la surface (bulles) ou en sédiments près du fond (sédiments en suspension ou interface eau / vase) avec des effets importants sur la couche limite de fond et/ou l'atténuation des vagues (e.g. Winterwerp 2007, Styles et Glenn 2001).
- H12. Quand on prend en compte la rotation de la Terre, une petite composante transversale de la vitesse apparaît (et dans ce cas le mouvement induit par les vagues est rotationnel. Cette composante est de l'ordre de f_3/σ par rapport à la composante longitudinale, et en phase avec la vitesse verticale, la rotation de la terre a un effet important sur le courant de dérive induit par les vagues (Hasselmann 1970, Xu et Bowen 1994, Ardhuin et coll. 2004). Pour les vagues générées par le vent, f_3/σ est généralement de l'ordre de 10^{-4} et l'effet sur la cinématique des vagues est imperceptible, de même que la modification de la relation de dispersion ou de la trajectoire de propagation des groupes de vagues sur la surface océanique (Backus 1962). Cela reste vrai pour les tsunamis dont les périodes sont de quelques minutes à plusieurs dizaines de minutes. La théorie d'Airy est donc tout à fait applicable aux tsunamis (dans la limite où les effets non-linéaires sont faibles). Par contre pour des périodes proches ou plus longues que la période d'inertie, comme les ondes de marée ou les modes de bassins (pour des bassins de quelques milliers de kilomètres), la prise en compte de la rotation de la terre est indispensable. On a alors des ondes d'inertie-gravité.

II. HOULE RÉGULIÈRE D'AMPLITUDE FINIE

A. Théorie de Stokes pour les faibles non-linéarités

Comme nous l'avons vu, la condition à la limite en surface pour l'équation de Laplace qui décrit le mouvement des vagues (1.18) est non-linéaire, elle contient des produits de dérivées de l'élévation de surface ζ et du potentiel des vitesses ϕ . Par ailleurs, un autre type de non-linéarité apparait quand on fait un développement en série des dérivées verticales, en suivant la méthode de Hasselmann (1962), pour ramener l'équation (1.18) de $z = \zeta$, qui est inconnu, à z = 0, qui est fixe, cela traduit l'effet que pour les vagues courtes, la présence des vagues plus longues a l'effet d'une modulation du niveau moyen. Tous les termes non linéaires sont faibles pour des vagues réelles, dont la pente ε est limitée par le déferlement, et donc ils agissent comme des corrections aux solutions linéaires. On écrit donc la solution générale des équations comme une série en puissance de ε , pour le potentiel cela donne

$$\phi = \phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3 + O\left(\varepsilon^3\right). \tag{2.1}$$

 ϕ_1 est solution des équations linéarisées (équations à l'ordre 0 en ε) c'est-à-dire (1.24), et donc ϕ_1 est une superposition d'ondes planes monochromatiques telles qu'elles ont été déterminées au chapitre I :

$$\phi_1 = \sum_{\mathbf{k},s} \frac{\cosh\left(kz + kh\right)}{\cosh\left(kh\right)} \Phi_{1,\mathbf{k}}^s\left(\tilde{t}\right) e^{\mathbf{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - s\sigma t)},\tag{2.2}$$

avec σ et **k** qui vérifient la relation de dispersion linéaire (1.27). La variation de $\Phi_{1,\mathbf{k}}^s$ sur la grande échelle de temps \tilde{t} n'est pas contrainte par les équations à l'ordre 0 (les amplitudes $\Phi_{1,\mathbf{k}}^s$ sont constantes à l'ordre 0), mais permettra de satisfaire les équations aux ordres supérieurs.

Il faut maintenant déterminer les solutions aux ordres supérieurs qui prennent en compte les termes non-linéaires et vont faire évoluer les amplitudes dans le temps, et donc le spectre de l'énergie des vagues. A l'ordre 1 en ε , on a la même équation d'onde pour ϕ_2 , mais elle est forcée par un terme supplémentaire dans le membre de gauche, issu du développement autour de z = 0, et quatre à droite, issus des termes non-linéaires de (1.18) :

$$\frac{\partial^2 (\phi_2)}{\partial t^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 (\phi_1)}{\partial z \partial t^2} + g \frac{\partial (\phi_2)}{\partial z} + g \zeta_1 \frac{\partial^2 (\phi_1)}{\partial z^2} = g \nabla \phi_1 \cdot \nabla \zeta_1 \quad - \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} - \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial \nabla \phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} \\ \hat{a} \quad z = 0.$$
(2.3)

On remplace alors ϕ_1 et ζ_1 qui sont connus (reliés par la relation de polarisation (1.30)) pour obtenir une équation d'onde forcée,

$$\frac{\partial^2\left(\phi_2\right)}{\partial t^2} + g \frac{\partial\left(\phi_2\right)}{\partial z} = \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} \sum_{\mathbf{k}_2, s_2} D\left(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\right) \Phi_{1, \mathbf{k}_1}^{s_1} \Phi_{1, \mathbf{k}_2}^{s_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - (s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2)t\right]},\tag{2.4}$$

 ϕ_2 vérifie l'équation de Laplace et la condition cinématique au fond, et sa composante de Fourier $\Phi_{2,\mathbf{k}}$ pour le nombre d'onde \mathbf{k} a donc une structure verticale du même type que ϕ_1 en $\cosh(kz + kh)$. La transformée de Fourier spatiale de (2.4) donne donc

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2,\mathbf{k}}}{\partial t^2} + gk \tanh(kh) \Phi_{2,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}, s_1, s_2} D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Phi_{1,\mathbf{k}_1}^{s_1} \Phi_{1,\mathbf{k}_2}^{s_2} e^{i - (s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2)t},$$
(2.5)

et les coefficients de Fourier $Z_{2,\mathbf{k}}$ de ζ_2 en sont déduit via le développement à l'ordre 2 de la condition cinématique en surface,

$$Z_{2,\mathbf{k}} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_{2,\mathbf{k}}}{\partial t} + \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}, s_1, s_2} G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Phi_{1,\mathbf{k}_1}^{s_1} \Phi_{1,\mathbf{k}_2}^{s_2} e^{-i(s_1\sigma_1 + s_1\sigma_1)t}.$$
 (2.6)

où les coefficient de couplage $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ et $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ sont donnés par Phillips (1960) pour le cas de



FIG. 2.1 – Profils comparés d'une vague linéaire d'Airy et d'une vague de Stokes

l'eau profonde $(kh \ll 1)$, et Hasselmann (1962) pour les profondeurs intermédiares :

=

$$D(\mathbf{k}_{1}, \mathbf{k}_{2}) = i(s_{1}\sigma_{1} + s_{2}\sigma_{2})[k_{1}k_{2}\tanh(k_{1}h)\tanh(k_{2}h) - \mathbf{k}_{1} \cdot \mathbf{k}_{2}]$$

$$-\frac{i}{2}\left(\frac{s_{1}\sigma_{1}k_{2}^{2}}{\cosh^{2}(k_{2}h)} + \frac{s_{2}\sigma_{2}k_{1}^{2}}{\cosh^{2}(k_{1}h)}\right),$$

$$G(\mathbf{k}_{1}, \mathbf{k}_{2}) = \frac{1}{2g}\left[\mathbf{k}_{1} \cdot \mathbf{k}_{2} - g^{-2}s_{1}s_{2}\sigma_{1}\sigma_{2}\left(\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2} + s_{1}s_{2}\sigma_{1}\sigma_{2}\right)\right].$$
(2.7)
$$(2.8)$$

L'équation d'oscillateur forcé (2.5) ne peut conduire à une résonance car la relation de dispersion est telle que $\sigma(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \neq \sigma(\mathbf{k}_1) + \sigma(\mathbf{k}_2)$ sauf dans la limite de l'eau peu profonde $kh \to 0$, ou pour des vagues de gravité-capillarité. En dehors de ces deux cas, les solutions de second ordre sont donc des vagues d'amplitude limitée et elles sont liées aux solutions du premier ordre. Ces variations d'amplitudes causée par des interactions non-résonantes peuvent donner lieu a des échanges temporaires d'énergies entre les différentes componsantes aussi appelées récurrences (Fermi, Pasta et Ulam 1955).

On remarque que si l'on a une seule composante de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 à l'ordre 1, donc une vague monochromatique d'amplitude $a = 2Z_{1,\mathbf{k}_0}^+$, avec $\Phi_{1,\mathbf{k}_0}^+ = -iag/(2\sigma)$ et

$$\phi_1 = \frac{\cosh\left(k_0 z + k_0 h\right)}{\cosh\left(k_0 h\right)} \left(\Phi_{1,\mathbf{k}_0}^+ e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \sigma_0 t)} + \overline{\Phi}_{1,\mathbf{k}_0}^+ e^{-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \sigma_0 t)}\right),\tag{2.9}$$

alors on a :

$$\phi_2 = \frac{\cosh\left(2k_0z + 2k_0h\right)}{\cosh\left(2k_0h\right)} \left(\Phi_{2,2\mathbf{k}_0}^+ e^{i(2\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - 2\sigma_0 t)} + \overline{\Phi}_{2,2\mathbf{k}_0}^+ e^{-i(2\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - 2\sigma_0 t)}\right) + 2\Phi_{2,\mathbf{0}}^+ \tag{2.10}$$

avec

$$\Phi_{2,2\mathbf{k}_{0}}^{+} = D(\mathbf{k}_{0},\mathbf{k}_{0}) \frac{\left(\Phi_{1,\mathbf{k}_{0}}^{+}\right)^{2}}{\sigma^{2}(2k_{0}) - 4\sigma_{0}^{2}}$$
(2.11)

$$= \frac{3i\sigma k\cosh\left(2kh\right)}{4g\sinh^{3}\left(kh\right)\cosh\left(kh\right)} \left(\Phi_{1,\mathbf{k}_{0}}^{+}\right)^{2}, \qquad (2.12)$$

 et

$$\Phi_{2,0}^+ = 0, \tag{2.13}$$

qui donnent

$$Z_{2,2\mathbf{k}_{0}}^{+} = a^{2} \frac{k \cosh\left(kh\right) \left[2 + \cosh\left(2kh\right)\right]}{32 \sinh^{3}\left(kh\right)},$$
(2.14)

$$Z_{2,0}^{+} = a^2 \frac{\sigma^2}{g^2} k^2 \left[\tanh^2 \left(2kh \right) - 1 \right].$$
(2.15)

 et

Il s'agit là du premier terme de correction de l'amplitude des vagues linéaires dans la série qui décrit une houle de Stokes de second ordre (figure 2.1).

Les harmoniques sont en phase avec le mode fondamental (linéaire), ce qui donne

$$\zeta = a \cos \left[k \left(x - Ct\right)\right] + ka^2 \frac{\cosh \left(kD\right) \left[2 + \cosh \left(kD\right)\right]}{\sinh^3 \left(kD\right)} \cos \left[2k \left(x - Ct\right)\right)\right]$$
(2.16)

$$u = \omega a \frac{\cosh(2z+2D)}{\sinh(kD)} \cos[k(x-Ct)] + \frac{3}{4}k^2 a^2 C \frac{\cosh(2kz+2kD)}{\sinh^4(kD)} \cos[2k(x-Ct))] \quad (2.17)$$

$$C = gk \tanh(kD) \left[1 + k^2 a^2 \frac{5 + 2\cosh(2kD) + \cosh^2(2kD)}{8\sinh^4(kD)} \right]$$
(2.18)

On remarque que la vitesse de phase augmente avec l'amplitude des vagues, et la vitesse associée aux vagues est plus importante sous les crêtes que sous les creux.

A partir de l'ordre 5, le calcul devient assez complexe. On utilise plutôt la théorie de Dean (1965), basée sur la fonction de courant (plutôt que le potentiel), qui permet de calculer numériquement les coefficients du développement.

Cette houle de Stokes est instable et produit spontanément des ondes plus courtes et plus longues avec lesquelles elle échange de l'énergie de manière récurrente, c'est l'instabilité de Benjamin-Feir (1967, voir aussi Chalikov 2007). Ainsi la houle de Stokes n'existe pas en réalité. Pour ak > 0.13 certaines des vagues irrégulières issues de l'instabilité évoluent vers des formes toujours plus cambrées jusqu'à déferler.

B. Méthodes de calcul des houles régulières d'amplitude finie

Le calcul par approximations successives tels que développé par Stokes, n'est faisable "à la main" que jusqu'à l'ordre 5 environ (De 1955). Au delà, plusieurs méthodes numériques ont été développées. En particulier Longuet-Higgins et Fenton (1974) ont montré que l'énergie ou la vitesse de phase croissent pas de manière monotone avec la hauteur de la vague, et donc le paramètre ak est assez mal choisi pour caractériser la non-linéarité des vagues les plus pentues.

Plusieurs méthodes numériques ont été développées par Dean (1965), Schwartz (1974). La méthode de Dean a été étendue par Dalrymple (1974) pour des vagues en présence d'un courant variant linéairement du fond à la surface, cas dans lequel l'équation de Laplace est encore vérifiée. Cette méthode itérative estime les coefficients de Fourier du potentiel des vitesses en minimisant l'erreur faite sur la condition cinématique à la surface. En pratique cette méthode est simple à programmer et permet d'obtenir des solutions jusqu'à 100 harmoniques pour des vagues dont la vitesse orbitale à la crête $u_{\rm max}$ atteint 98% de la vitesse de phase C. Cette méthode, programmée en Matlab a été utilisée pour obtenir la figure 2.2. Lorsque $u_{\rm max}$ s'approche de C, en particulier pour les faibles profondeurs kD < 0.3, la solution est difficile à trouver avec l'algorithme utilisé par Dalrymple.

Cette difficulté a été contournée par Cokelet (1977), qui a défini comme petit paramètre

$$\epsilon = \left[1 - \frac{q_{\text{crest}}^2 q_{\text{trough}}^2}{C^4}\right]^{1/2} \tag{2.19}$$

avec q_{crest} et q_{trough} les vitesses à la crête et au creux, respectivement, dans le référentiel se déplaçant avec la vague ($q_{\text{crest}} = u_{\text{max}} - C = 0$ pour une vaque d'amplitude limite). Ce paramètre est clairement compris entre 0 et 1 et permet un développement limité en puissance de ϵ . Cokelet a par ailleurs amélioré la qualité du résultat numérique en utilisant des approximants de Padé, qui permettent de prendre en compte des singularités dans les séries, et d'étendre considérablement le domaine de validité de l'approximation.

C. Cinématique des houles d'amplitude finie

Les houles d'amplitude finie se caractérisent par une asymétrie (par rapport à un plan horizontal) entre les crêtes et les creux : les creux sont plus plats et les vitesse sont plus faibles que els crêtes. La vague la plus pentue possède même un point anguleux à sa crête, avec un angle de 120° et la vitesse



FIG. 2.2 – Profils de vagues calculés avec la méthode de Dean et Dalrymple à l'ordre 60, pour une profondeur de 3 m. (a) et (b) sont des vagues de 1.5 s de période, correspondant à $kD \simeq 5$ ce qui les situe en eau profonde, tandis que (c) et (d) sont des vagues de 8 s de période. (a) et (c) sont des vagues de non-linéarité intermédiare $(u_{\text{max}}/C \simeq 0.3)$ tandis que (b) et (d) sont quasiment les vagues les plus hautes, sur le point de déferler $(u_{\text{max}}/C \simeq 0.97)$.

des particules fluides y atteint la vitesse de phase. Dans le référentiel se déplaçant avec la vague, on y trouve un écoulement de coin avec un point d'arrêt à la crête.

Les conséquences de ces propriétés sont multiples. En particulier la vitesse de phase, l'énergie et la dérive de Stokes sont légèrement plus importantes (entre 5 et 10% en eau profonde) par que ce que donnent les solutions pour les vagues linéaires (Cokelet 1977). La différence relative est environ quatre fois plus forte dans la limite de l'eau peu profonde, où il devient difficile de négliger cette non-linéarité pour les vagues très cambrées.

D. Propriétés intégrales

Certaines relations sont vérifiées de manière exacte pour toute houle périodique de longueur d'onde L. Nous reprenons ici les résultats énoncés par Cokelet (1977). En choisissant z_0 tel que $-h < \infty$

D. PROPRIÉTÉS INTÉGRALES

 $z_0 < \min(\zeta)$ (profondeur toujours sous dans l'eau), on (re-)définit,

$$\mathcal{M} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \rho_w \zeta dx = \rho_w \overline{\zeta}, \qquad (2.20)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_w u(x, z_0) \mathrm{d}x = \rho_w \overline{u}, \qquad (2.21)$$

$$M^w = \int_{-h}^{\zeta} \rho_w u \mathrm{d}z, \qquad (2.22)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{-h}^{\zeta} \rho_w \left(u^2 + w^2 \right) dz, \qquad (2.23)$$

$$E_p = \int_{\overline{\zeta}}^{\zeta} \rho_w g z \mathrm{d}z, \qquad (2.24)$$

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (p + \rho_w u^2) \, \mathrm{d}z} - \overline{\int_{-h}^{\zeta} p^H \, \mathrm{d}z} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (p + \rho_w u^2) \, \mathrm{d}z} - \frac{1}{2} \rho_w g D^2, \qquad (2.25)$$

$$F = \int_{-h}^{\zeta} \left[p + \frac{1}{2} \rho_w \left(u^2 + w^2 \right) + \rho_w g \left(z - z \, eta \right) \right] u dz, \qquad (2.26)$$

$$\overline{u_b^2} = \frac{1}{L} \int_0^L u^2(x, -h, t) \,\mathrm{d}x.$$
(2.27)

Dans le référentiel en mouvemement avec les vagues, trois grandeurs suivantes sont indépendantes de x. Il s'agit du flux de masse par unité de longueur,

$$-Q = \int_{-h}^{\zeta} \rho_w u - C \mathrm{d}z = -\rho_w Ch.$$
(2.28)

La profondeur h représente une profondeur fictive d'un écoulement permanent à la vitesse de phase C et dont le débit serait égal à celui du train de vagues. Un écoulement permanent qui aurait la même profondeur et débit aurait par contre une vitesse

$$c_m = -\overline{\frac{1}{d+\zeta} \int_{-h}^{\zeta} u - C \mathrm{d}z} = Ch/D.$$
(2.29)

Les deux autres grandeurs indépendantes de x sont la pression dynamique

$$R = \frac{p}{\rho_w g} + \frac{1}{2g} \left[(u - C)^2 + w^2 \right] + (z + h)$$
(2.30)

et le flux de quantité de mouvement par unité de longueur

$$S = \int_{-h}^{\zeta} \left[p + (u - C)^2 \right] dz.$$
 (2.31)

On a alors les relations intégrales suivantes, valables pour toute houle périodique d'amplitude finie,

$$M^w = \rho_w CD - Q, \qquad (2.32)$$

$$2E_c = CM^w - \rho_w \mathcal{C}, \tag{2.33}$$

$$S_{xx} = 4E_c - 3E_p + \rho_w u_b^2 + \rho_w C^2$$
(2.34)

$$F = C \left(3E_c - 2E_p\right) + \frac{1}{2}\overline{u_b^2} \left(M^w + \rho_w CD\right) + CCQ$$
(2.35)

$$K = 2\frac{\mathcal{M}}{\rho_w} + \overline{u_b^2} + C^2, \qquad (2.36)$$

$$R = \frac{1}{2}K + h, (2.37)$$

$$S = S_{xx} - 2CM^w + D\left(C^2 + \frac{1}{2}D\right), \qquad (2.38)$$

où K est la constante de Bernouilli, qui est reliée à la condition dynamique à la surface (pression constante),

$$K = (u - C) + w^2 + 2\zeta$$
 pour $z = \zeta$ (2.39)

III. VAGUES ALÉATOIRES : THÉORIE ET MÉTHODES DE MESURES

Α. Le spectre des vagues

Bien souvent, le détail du mouvement des vagues en tout point n'est pas intéressant en soi, et on souhaite en pratique connaître l'évolution de certaines propriétés des vagues sur des distances bien supérieures à la longueur d'onde. On préfère donc une approche statistique.

Comme les vagues d'Airy sont les solutions des équations d'Euler linéarisées, toute superposition de ces vagues est aussi solution des mêmes équations. La forme simple que nous avons utilisée en (1.19) avait une variation horizontale et temporelle donnée par $\exp[iS]$ avec la phase,

$$S = [\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_A + s\sigma) t].$$
(3.1)

 $\exp[iS]$ ajouté à son complexe conjugué (noté c. c.), est simplement $2\cos[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}_A+s\sigma)t]$. On utilisera les exponentielles complexes plutôt que les sinus et cosinus afin de ne pas avoir à se soucier des signes des dérivées.

Plusieurs effets (variation de profondeur et courants) peuvent déformer le train d'onde. On en profite donc pour généraliser un peu la forme des vagues d'Airy. On utilise la fonction de phase généralisée (appelée eikonal) $S^s_{\mathbf{k}}$ associée au train d'onde de nombre d'onde \mathbf{k} et se propageant dans la direction du vecteur sk, avec s égal à 1 ou -1. Tout ce que l'on demande à S_k^s , c'est de ressembler, localement à la fonction $[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_A + s\sigma) t]$, c'est à dire

$$\nabla S_{\mathbf{k}}^{s} = \mathbf{k} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S^s_{\mathbf{k}} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_A - s\sigma. \tag{3.3}$$

Grâce à la linéarité des équations, on peut donc représenter un état de mer quelconque par la décomposition de la surface suivante, chaque composante étant à peu près une solution d'Airy,

$$\zeta(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k},s} Z_{\mathbf{k}}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathbf{k}}^{s}(\mathbf{x},t)} + O\left(\varepsilon^{2}\right), \qquad (3.4)$$

ce qui donne, localement,

$$\zeta\left(\mathbf{x},t\right) = \sum_{\mathbf{k},s} Z_{\mathbf{k}}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{A} + s\sigma t\right)\right]} + O\left(\varepsilon^{2}\right),\tag{3.5}$$

avec σ_k donné à partir de $k = |\mathbf{k}|$ par la relation de dispersion pour les vagues linéaires (1.27).

L'unicité de cette décomposition n'est pas tout a fait évidente, elle fait appel à la théorie des spectres évolutifs (Priestley 1981) dans le cas ou les amplitudes $Z^s_{\mathbf{k}}$ sont des fonctions variant lentement avec x et t¹. Dans le cas plus simple ou les $Z^s_{\mathbf{k}}$ sont constantes, il s'agit d'une simple transformée de Fourier. Enfin, la somme utilisée ici peut représenter une intégrale, et $\lim_{\Delta k \to 0} Z^s_{\mathbf{k}} = dZ$ est alors la transformée de Fourier-Stieltjes de l'élévation de la surface,

$$\zeta(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbf{k},\sigma} \mathrm{d}Z.$$
(3.6)

Puisque l'élévation ζ est une grandeur réelle on a la relation suivante,

$$\overline{Z^s_{\mathbf{k}}} = Z^{-s}_{-\mathbf{k}},\tag{3.7}$$

avec $\overline{Z_{\mathbf{k}}^{s}}$ le complexe conjugué de $Z_{\mathbf{k}}^{s}$. Avec nos notations, pour s = 1 les vagues se propagent dans la direction de \mathbf{k} , et pour s = -1, dans la direction de $-\mathbf{k}$. Les composantes (\mathbf{k}, s) et $(-\mathbf{k}, -s)$ correspondent donc aux mêmes vagues, ce

¹lentement : variations faibles à l'échelle de la longueur d'onde et de la période

qui aurait été plus clair si l'on avait utilisé une décomposition en cosinus plutôt qu'en exponentielles complexes : ces deux 'composantes' sont les deux morceaux d'un même cosinus.

Nous verrons plus tard qu'une meilleure approximation peut être donnée pour prendre en compte les effets non-linéaires. Dans la plupart des cas, les phénomènes négligés pour aboutir à la solution d'Airy, tels que le vent, le déferlement des vagues, les courants, la friction au fond, ne modifient les vagues que sur de grandes distances, si bien que l'amplitude $Z_{\mathbf{k}}^s$ varie sur une grande échelle $\tilde{\mathbf{x}}$. On peut alors se contenter de décrire l'état de la mer par les amplitudes locales $Z_{\mathbf{k}}^s$, qui, en pratique, sont mesurées en un ou quelques points. Les phases sont souvent peu importantes, et on représente l'état de la mer comme une réalisation d'un processus aléatoire tel que les phases $\varphi_{\mathbf{k}}^s$ de chaque composante, arguments des nombres complexes $Z_{\mathbf{k}}^s$, sont aléatoirement distribuées sur $[0, 2\pi]$ suivant une loi uniforme. En supposant que ce processus est ergodique on peut remplacer la moyenne sur plusieurs réalisations hypothétiques par une moyenne sur plusieurs enregistrements consécutifs, que nous noterons $\langle \cdot \rangle$, chaque enregistrement étant nettement plus long que la période des vagues. On observe généralement que les phases relatives des $Z_{\mathbf{k}}^s$, c'est à dire $\varphi_{\mathbf{k}1}^{s1} - \varphi_{\mathbf{k}2}^{s2}$, varient de manière aléatoire d'un enregistrement à l'autre. Ainsi l'espérance mathématique des corrélations des amplitudes est nulle pour des vagues exactement linéaires²,

$$\left\langle Z_{\mathbf{k}}^{s}\overline{Z}_{\mathbf{k}'}^{s'}\right\rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'}\left|Z_{\mathbf{k}}^{s}\right|^{2}.$$
(3.8)

Nous laisserons donc les phases de côté pour nous intéresser aux amplitudes, plus particulièrement à leur carré. En effet, le théorème de Parseval donne la variance de l'élévation de la surface comme la somme des modules carrés des amplitudes de Fourier. Donc l'espérance de l'énergie potentielle est la somme des espérances des énergies potentielles de chaque composante

$$E_{p} = \left\langle \frac{1}{2} \rho g \zeta^{2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \rho g \sum_{\mathbf{k}_{1}, s_{1}} \sum_{\mathbf{k}_{2}, s_{2}} Z_{\mathbf{k}_{1}}^{s_{1}} Z_{\mathbf{k}_{2}}^{s_{2}} \exp\left[i((\mathbf{k}_{1} + \mathbf{k}_{2}) \cdot \mathbf{x} - (s_{1}\sigma_{k_{1}} + s_{2}\sigma_{k_{2}})t)\right] \right\rangle + O(\varepsilon^{3})$$

$$= \frac{1}{2} \rho g \sum_{\mathbf{k}, s} \left\langle |Z_{\mathbf{k}}^{s}|^{2} \right\rangle.$$
(3.9)

On regroupe d'abord les 'composantes' (\mathbf{k}, s) et $(-\mathbf{k}, -s)$ qui ont des modules égaux car ζ est réel et $Z_{-k}^{-s} = \overline{Z_k^s}$, ce sont les deux morceaux d'un même cosinus $\cos(kx - \sigma t + \varphi) = \left[e^{i\varphi}e^{i(kx-\sigma t)} + e^{-i\varphi}e^{i(-kx+\sigma t)}\right]/2$. L'énergie totale, somme des énergies potentielles et cinétiques qui sont égales d'après (1.52), s'écrit

$$E_w = 2\rho_w g \sum_{\mathbf{k}} \left\langle \left| Z_{\mathbf{k}}^+ \right|^2 \right\rangle.$$
(3.10)

Ce type de spectre peut se mesurer avec un réseau de capteurs (perches à houle, capteurs de pression, voir Donelan et coll. 1985), ou, plus facilement, un instrument imageur : stéréo-photogrammétrie (Chase et coll. 1957), différents types de radars à vagues (Schuler 1978, Jackson et coll. 1985) ou un radar synthèse d'ouverture, éventuellement en mode interférométrique (Elachi et coll. 1977, Marom et coll. 1990). Avec un instrument fixe ou se déplaçant lentement par rapport à la vitesse de phase des vagues, on mesure plutôt des séries temporelles, et donc des spectres en fréquence évalués à des fréquences régulièrement espacées de Δf . On peut ré-écrire l'énergie sous la forme

$$E_w = 2\rho_w g \sum_f \frac{1}{\Delta f \Delta \theta} \left\langle \left| Z_{\mathbf{k}}^+ \right|^2 \right\rangle \Delta f \Delta \theta, \qquad (3.11)$$

où $\Delta\theta$ est la différence entre deux directions consécutives θ du vecteur d'onde **k**. On admettra que $2\rho g \left\langle \left| Z_{\mathbf{k}}^{+} \right|^{2} \right\rangle / (\Delta f \Delta \theta)$ a une limite quand Δf et $\Delta \theta$ tendent vers 0, notée $E(f, \theta)$. Il s'agit de la densité spectro-angulaire, définie pour f > 0 seulement. On a donc

$$E = \frac{E_w}{\rho_w g} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}f,\tag{3.12}$$

²Cette absence de corrélations n'est vraie que en moyenne spatiale sur une échelle supérieure à la moitié de la longueur d'onde. ponctuellement des corrélations existent entre les composantes $Z_{\mathbf{k}}^{s}$ et $Z_{\mathbf{k}}^{-s}$ sous la forme d'ondes partiellement stationnaires. La présence de cette modulation à petite échelle peut être importante : variations de pression même par grands fonds responsable de la génération de microséismes (Longuet-Higgins 1950), transport sédimentaire ...

A. LE SPECTRE DES VAGUES

qui s'écrit aussi souvent

$$E = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(f,\theta) \,\mathrm{d}\theta E(f) \,\mathrm{d}f \tag{3.13}$$

avec la fonction de répartition angulaire

$$\int_{0}^{2\pi} S\left(f,\theta\right) \mathrm{d}\theta = 1. \tag{3.14}$$

1. Nombre d'onde ou fréquence?

Suivant la méthode de mesure ou le modèle numérique, certaines coordonnées spectrales peuvent être les plus pratiques à manipuler. Voici les correspondances, en supposant que les vagues suivent la relation de dispersion linéaire (1.27),

$$E(f,\theta) d\theta df = E(k,\theta) d\theta dk, \qquad (3.15)$$

qui donne

$$E(f,\theta) = \frac{\partial k}{\partial f} E(k,\theta) = \frac{2\pi}{C_g} E(k,\theta).$$
(3.16)

De la même façon, on trouve,

$$E(f,\theta) = \frac{2\pi}{C_g} E(k,\theta) = \frac{2\pi k}{C_g} E(k_x,k_y) = k\cos\theta E(f,k_y).$$
(3.17)

Il convient d'utiliser avec prudence ces relations pour la partie haute fréquence du spectre, en effet les grandes vagues introduisent un décalage aléatoire en fréquence pour les vagues les plus courtes et la relation de dispersion linéaire n'est généralement plus pertinente à des fréquences dépassant trois fois le pic de la mer du vent.

Enfin, certains modèles, et on verra pourquoi au chapitre VII, utilisent plutôt le spectre de l'action définie par,

$$A(k,\theta) = \frac{1}{\sigma}E(k,\theta) = \frac{1}{C}E(k_x,k_y).$$
(3.18)

Par exemple, le modèle numérique WAVEWATCH III (Tolman 1991) calcule l'évolution de $A(k, \theta)$, discrétisé avec N fréquences et M directions, par une variable ASPEC(I,J), avec $1 \leq I \leq N$ et $1 \leq J \leq M$. Cependant, les sorties du modèles sont des spectres $E(f, \theta)$ (en mètres carrés par Hertz et par radian).

2. Quelques spectres

Le spectre étant la variable primitive des modèles de prévisions de l'état de la mer, il est au coeur de la plupart de ce qui suit. Il convient donc de se familiariser avec ce qu'il représente. Ainsi la figure 2 illustre la correspondance entre la forme de la surface et le spectre.

Le lecteur pourra s'exercer à prendre un spectre issu d'un modèle numérique et recomposer une surface dans l'espace physique,

$$\zeta(x,y) = \sum E\left(k_x, k_y\right) e^{i[k_x x + k_y y - \psi(k_x, k_y)]} \Delta k_x \Delta k_y.$$
(3.19)

On utilisera généralement un tirage au sort aléatoire pour les phases $\psi(k_x, k_y)$. Une telle surface aura souvent une apparence plus lisse que l'état de mer réel, ce qui vient de l'approximation des phases aléatoire qui néglige les effets non-linéaires de couplage de phase entre différentes composantes. Ainsi les films d'animation et l'industrie des effets spéciaux utilisent des corrections non-linéaires pour améliorer le rendu visuel. Ce type de correction non-linéaire (e.g. Prevosto et Forristall 2002) est aussi utilisé pour calculer des effets sur des structures en mer (industrie offshore). Certains de ces effets seront évoqués au §V.B.



FIG. 3.1 – Correspondance entre espace physique et espace spectral. Spectres schématiques de surface monochromatique (à gauche) et modulée en nombre d'onde ou en direction. Dans ces deux derniers cas la surface est la some de trois composantes.

B. Rudiments d'analyse spectrale

1. Spectre et transformée de Fourier discrète

Le plus souvent, on a seulement une série temporelle en un point fixe : un capteur de pression a une profondeur connue, un laser infra-rouge ou un radar montés sur une tour, une plate-forme pétrolière ou une digue, qui mesure l'élévation de la surface. En laboratoire ou l'environnement est plus clément et les élévations sont plus faibles et connues, on utilise traditionnellement des sondes à capacitance. On a donc un signal $\zeta(t)$ ou p(t) échantilloné à une certaine fréquence f_s , typiquement $1 < f_s < 4$ Hz en mer, et $f_s \sim 10 \text{ Hz}$ ou plus en laboratoire. Il est en effet essentiel que la fréquence d'échantillonage soit au moins d'environ 4 fois la fréquence des vagues que l'ont veut mesurer : pour représenter un cosinus, 4 points par période c'est déjà assez grossier.

Supposons qu'on ait ainsi une série de mesures d'élévation $\zeta(n)$ avec $1 \le n \le N$. La durée de l'enregistrement est $(N-1)/f_s$. On peut alors utiliser son logiciel favori et calculer une transformée de Fourier discrète,

$$dZ(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \zeta(n) e^{-2i\pi(m-1)(n-1)/N}.$$
(3.20)

On remarque que, avec cette définition, $dZ(m) = \overline{dZ(N+2-m)}$ si bien que le spectre est symétrique par rapport à m = N/2 qui correspond à la fréquence de Nyquist $f_s/2$.

Pour les variables aléatoires stationnaires de carré intégrable on sait que dZ(m)dZ(m)/df tend vers E(f) à la fréquence $f = (m-1)f_s/N$, quand f_s tend vers zéro, avec $(N-1)/f_s$ et f fixés (quand on augmente la fréquence d'échantillonage jusqu'à l'infini). $df = f_s/(N-1)$ est la résolution spectrale, c'est la plus petite fréquence mesurable. Cela ce comprend assez bien car cela correspond à une période 1/df qui est la durée totale de l'enregistrement.

Le spectre E(f) est donc estimé de manière approchée par

$$E((m-1)f_s/N) = \frac{dZ(m)dZ(m)}{df}.$$
(3.21)
De la même manière le co-spectre de deux variables a et b de transformées dA et dB est approché par

$$C_{ab}((m-1)f_s/N) = \frac{dA(m)\overline{dB(m)}}{df} = P + iQ, \qquad (3.22)$$

avec P et Q les co-spectres en phase et en quadrature.

Il est aussi intéressant de noter que le produit des tranformées de Fourier de deux fonctions est la transformée de Fourier de la convolution de ces deux fonctions. Quand ces deux fonctions sont identique on trouve que le spectre est la transformée de Fourier de la fonction d'auto-covariance.

2. Estimation pratique

La transformée de Fourier discrète pour un signal tel que $\zeta(1) \neq \zeta(N)$ correspond à une transformée d'une fonction périodique de période N mais qui aurait un saut à chaque période. Or ce saut va donner une contribution importante sur tout le spectre et contaminer le vrai spectre : c'est le *leakage*. Ce problème est réduit en appliquant une *fenêtre* qui réduit à zéro les valeurs au début et à la fin de l'enregistrement (la perte de variance associée est compensée par une correction du spectre final : on applique une correction de fenêtre). Par ailleurs, pour éviter de perdre l'information dans la région mise à zéro, on effectue généralement une moyenne des spectres obtenus sur des segments contigus, avec un recouvrement.

Enfin si l'échantillonnage est trop grossier le signal peut contenir des variations à haute fréquence qui sont *repliées* sur le spectre obtenus (aliased en anglais, d'où le nom de repliement ou aliasing pour ce phénomène). Il est donc souhaitable de filtrer la partie haute fréquence du signal avant de l'échantillonner.

Plusieurs questions se posent alors sur la précision de l'estimation, et il faut alors avoir recours au statistiques. En effet, le spectre E(f) est très incertain. Pour une longueur d'enregistrement fixée, on ne peut pas connaitre précisément la valeur du spectre. Toute amélioration exige une perte de résolution fréquentielle. On peut soit lisser le spectre, soit calculer plusieurs spectres en coupant l'enregistrement en plusieurs morceaux, mais la perte de résolution est identique. La durée des enregistrement doit donc être assez longue pour être représentative de l'état de la mer. La hauteur moyenne des vagues est déterminée à environ 10% près si l'enregistrement contient 100 vagues. Pour une période de 10 s, cela oblige à un enregistrement de l'ordre de 20 minutes, ce qui est utilisé sur les bouées météorologiques. Une plus grande précision peut être obtenue en allongeant la durée de mesure. On perd alors en résolution temporelle.

Avec une mesure en un seul point, quel que soit la fréquence d'échantillonage, le produit des incertitudes temporelles $\Delta t = N/f_s$ et $\Delta f = f_s/N$ est constant et incompressible. C'est en quelque sorte le principe d'incertitude de l'analyse spectrale. En pratique on peut améliorer l'estimation en mesurant en plusieurs points voisins... si le spectre est effectivement unforme dans l'espace.

C. Utilisation du spectre

On a donc un spectre, c'est très bien mais que peut-on en faire? Tout d'abord il peut être assez encombrant de décrire l'état de la mer par une fonction de deux variables. Même quand elle est discrétisée dans un modèle numérique, on a facilement 24 direction et 25 fréquences, soit 600 paramètres, c'est beaucoup trop. Nous allons donc voir comment on condense cette information, après avoir illustré quelques applications via les fonctions de transfert.

1. Fonctions de transfert

En fonction de l'information souhaitée on peut tranformer le spectre de la variance de l'élévation de surface. En particulier, si on veut calculer la variance de la vitesse près du fond, on peut utiliser les relations de polarisation (1.30)–(7.25). En supposant que θ est l'angle entre l'axe des x et la direction vers où se propagent les vagues, on a ainsi le spectre de la composante x de la vitesse au fond, au second ordre en pente des vagues,

$$E_{Ux}(f,\theta) = \frac{\sigma^2 \cos^2 \theta}{\sinh^2(kD)} E(f,\theta)$$
(3.23)

et le module moyen de la vitesse (en moyenne quadratique) près du fond vaut,

$$U_{\rm b,rms} = \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2}{\sinh^2(kD)} E\left(f,\theta\right) d\theta df\right]^{1/2}$$
(3.24)

On peut ainsi calculer, des spectres de déplacement, de vitesse, de pente. Pour une particule se déplaçant en surface, on a en particulier les spectres des déplacements dans les trois directions, toujours au second ordre, mais cette fois intégré sur les directions, à partir de (7.25),

$$E_x(f) = \frac{1}{\tanh^2(kD)} \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \cos^2\theta d\theta$$
(3.25)

$$E_y(f) = \frac{1}{\tanh^2(kD)} \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \sin^2\theta d\theta$$
(3.26)

On peut aussi calculer les covariances de deux variables, par exemple, des déplacements horizontaux et du déplacement vertical, et qui sont purement imaginaires pour des vagues linéaires car ces grandeurs sont en quadrature de phase,

$$C_{xz}(f) = \frac{\mathrm{i}}{\tanh(kD)} \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \cos\theta \mathrm{d}\theta, \qquad (3.28)$$

$$C_{yz}(f) = \frac{\mathrm{i}}{\tanh(kD)} \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$
(3.29)

Ces correlations sont intéressantes car elles sont reliées aux directions moyennes et à l'étalement angulaire du spectre directionnel.

2. Relations entre le spectre et l'analyse vague par vague

Le spectre E(f) représente la répartition de l'énergie en fonction des échelles de temps que sont les fréquences. Cependant on peut aussi mesurer les périodes successives entre deux passages de la surface par le niveau moyen avec une analyse vague par vague et obtenir une distribution des périodes. En faisant l'approximation que l'élévation de la surface possède une amplitude constante a avec une modulation aléatoire en fréquence, on peut appliquer le théorème de Woodward (1952) qui donne le spectre à partir de la distribution des fréquences $P_f(f - f_c)$ avec f_c la fréquence centrale (la "porteuse" dans le langage des télécommunications),

$$E(f) = \frac{a^2}{2} P_f(f - f_c).$$
(3.30)

Jusque là, il parait difficile de décrire la surface océanique comme un signal d'amplitude constante avec une simple modulation en fréquence. Ce théorème a été étendu par Blachman et McAlpine (1969) qui ont aussi introduit une modulation de l'amplitude. Une extension pratique a été donnée récemment par Elfouhaily et coll. (2003). Le spectre est alors donnée à partir de la distribution conjointe des hauteurs et périodes, écrite sous la forme P(a, f) avec a = H/2 et f = 1/T. Elfouhaily et coll. (2003) ont montré que le spectre dans la région du pic était bien approché par le spectre nu, obtenu dans la limite de modulations infiniment lentes,

$$E_{nu}(f) = \frac{1}{2} \int a^2 P(a, f) da.$$
(3.31)

Pour les mesures de mer du vent analysées, le spectre obtenu classiquement par transformée de Fourier E(f) est bien supérieur au spectre nu de Elfouhaily pour les hautes fréquence $f > 1.5 f_p$. Cette sous estimation des hautes fréquence est attribuée à l'absence de modulation rapide, à l'échelle de la période, dans la description du signal. En prenant en compte de telles modulations, on peut obtenir un spectre habillé, défini à partir des probabilités conjointes des fréquences et des asymétries α et β (voir figure 3.2),

$$E_{\text{habille}}(f) = E_{\text{n}u}(f) + \frac{1}{2} \left[\int \alpha^2 P(\alpha, f/2) da + \int \beta^2 P(\beta, f/2) da \right] \simeq E(f)$$
(3.32)



FIG. 3.2 – Définition des paramètres M, n, T_1 et T_2 utilisés pour estimer l'amplitude a = (M - m)/2, la période $T = T_1 + T_2$, et les asymétries verticales $\alpha = (M + m)/2$ et horizontales $a\pi(T_1 - T_2)/(T_1 + T_2)/2$ (tiré de Elfouhaily et coll. 2003, ©Elsevier). Attention m < 0, car m est défini comme l'élévation du creux le plus bas entre les deux zéros-montants qui définissent la vague.

3. Paramètres spectraux et intégraux : H_s , T_p ...

Puisque le spectre est une décomposition de la variance de l'élévation de surface, le paramètre le plus important est certainement cette variance, E, souvent abusivement appelée énergie³.

Puisque E est la variance, $E^{1/2}$ est une échelle de longueur. En revenant aux vagues sinusoïdales, la variance est $a^2/2$ avec a l'amplitude. donc $\sqrt{2}E^{1/2}$ est une amplitude équivalente pour des vagues aléatoires. C'est en fait l'amplitude en moyenne quadratique. De même la hauteur d'une vague sinusoïdale est 2a. La hauteur (quadratique) moyenne d'une vague irrégulière est donc $H_{\rm rms} = 2\sqrt{2}E^{1/2}$.

En pratique l'échelle de hauteur la plus utilisée pour des vagues aléatoires est la hauteur significative H_s , qui correspond à l'impression visuelle donnée par la mer. Cette impression n'étant pas très précise scientifiquement, il faut définir une hauteur. A partir de la distribution p(H) on peut définir $H_{1/3}$ (voir chapitre I). A partir du spectre on définit,

$$H_s \simeq H_{m0} \equiv 4E^{1/2} = 4 \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(f,\theta) \,\mathrm{d}\theta E(f) \,\mathrm{d}f \right]^{1/2}.$$
 (3.33)

C'est cette définition qui sera utilisée par la suite. L'indice "m0" signifie qu'il s'agit du moment d'ordre zéro du spectre. On définit par ailleurs le moment d'ordre p de la manière suivante,

$$m_p = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f^p E\left(f,\theta\right) \mathrm{d}f \mathrm{d}\theta.$$
(3.34)

Souvent l'information directionnelle n'est pas indispensable, ou bien elle n'est pas mesurée, et on n'a que le spectre en fréquence,

$$E(f) = \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \,\mathrm{d}\theta. \tag{3.35}$$

Cette distribution de l'énergie en fonction de la fréquence permet de trouver des échelles de temps caractéristiques des vagues aléatoires. En particulier, le spectre E(f) a souvent un maximum très marqué

³On le rapelle, la densité d'énergie des vagues qui est un nombre de Joules par mètre carré d'océan est en fait $\rho_w g E$ avec ρ_w la densité de l'eau, et g la gravité

 $E(f_p) = E_{\text{max}}$. f_p est la fréquence du pic, correspondant à la période du pic $T_p = 1/f_p$. On peut aussi définir des périodes à partir du moment d'ordre p, ainsi,

$$T_{m0,p} = \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f^p E\left(f,\theta\right) \mathrm{d}f \mathrm{d}\theta\right]^{1/p}.$$
(3.36)

Les périodes moyennes les plus usités sont $T_{m0,1}$, $T_{m0,2}$, $T_{m0,-2}$, elles donnent plus ou moins de poids à la partie haute fréquence ou au pic. Si on s'intéresse à un effet proportionnel à f^2 (c'est généralement le cas des forces exercées par les vagues sur une structure), il sera logique d'utiliser la $T_{m0,2}$. Par ailleurs, la période $T_{m0,2}$ est très proche de la période moyenne T_z obtenue à partir d'une analyse vague par vague.

Enfin, en définissant,

$$a_1(f) = \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \cos\theta d\theta / \int_0^{2\pi} E(f,\theta) d\theta, \qquad (3.37)$$

$$b_1(f) = \int_0^{2\pi} E(f,\theta) \sin\theta d\theta / \int_0^{2\pi} E(f,\theta) d\theta, \qquad (3.38)$$

(3.39)

la direction moyenne des vagues de fréquence f est (en radians),

$$\theta_m(f) = \arctan\left(b_1(f)/a_1(f)\right) \tag{3.40}$$

et l'étalement directionnel, qui, tel que défini par Kuik et coll. (1988) est l'écart-type de la largeur spectrale dans la limite d'un spectre étroit (en radians)

$$\sigma_{\theta}(f) = \left[2\left(1 - \left(a_1^2(f) + b_1^2(f)\right)^{1/2}\right)\right]^{1/2}.$$
(3.41)

Pour un spectre isotrope avec une répartition uniforme de l'énergie sur toutes les directions, σ_{θ} est maximal et vaut $\sqrt{2}$ radians soit 81°. On pourra en particulier caractériser les propriétés directionnelles des vagues par la direction moyenne et l'étalement du pic spectral $\theta_m(f_p)$ et $\sigma_{\theta}(f_p)$. $\theta_m(f_p)$ est souvent appellée direction principale, alors que la direction moyenne sera plutôt une moyenne sur l'ensemble du spectre,

$$\theta_M = \arctan\left(\int_0^\infty b_1(f)E(f)\mathrm{d}f/\int_0^\infty a_1(f)E(f)\mathrm{d}f\right).$$
(3.42)

Pour ces directions, attentions aux conventions choisies. Il est usuel de compter les direction à partir du nord (direction 0) et en progressant dans le sens anti-trigonométrique (dans le sens des aiguilles d'une montre : 90 est, 180 sud, 270 ouest). Cela oblige donc a convertir les directions quand on fait les calculs de a_1 et b_1 dans un repère direct. Par contre, suivant les auteurs, la convention de sens est soit météorologique (direction d'où viennent les vagues et le vent), soit océanographique (direction vers où portent les vagues et le courant). Il convient donc de faire très attention.

D'après leurs définitions, on peut calculer a_1 et b_1 à partir du spectre de l'élévation E(f) et des co-spectres élévation - déplacement horizontal, E_{xz} et E_{yz} donnés par (3.28) et (3.29). Nous allons maintenant voir comment on mesure et calcule ces grandeurs.

D. Observation de vagues aléatoires

1. La perche à houle

Il s'agit de l'instrument de référence, qui mesure directement la position de la surface libre à la verticale d'un point fixe. La mesure se fait soit à partir de la résistance ou de la capacité dans le circuit constitué par un (ou deux) fils conducteurs formant une boucle fermée par la surface de la mer. Si cette mesure est la plus courante en laboratoire (on parle de sondes à houle), elle est plus délicate en mer car il faut un support fixe (plateforme, ancrage ...) et les forces exercées par les vagues sur les perches sont importantes. Il faut aussi prévoir une perche de grande longueur pour mesurer des vagues de grande hauteur. Ces perches peuvent aussi être montées sur une bouée qui filtre les vagues les plus





Bouée Datawell Waverider de 0,9 m de diamètre, équipée d'une (grande) antenne radio HF et d'une (petite) antenne satellite Orbcomm pour la transmission des données. A droite, exemple de déplacements mesuré par cette bouée au large de Crozon en mai 2004 (même série que la figure B). Il va sans dire que les creux de 10 m n'ont pas été mesurés au moment de la mise à l'eau.

longues par son mouvement (Graber et coll. 2000). Les perches sont le plus souvent associées en réseau (voir ci-dessous) de plusieurs perches sur une même plateforme, afin de permettre une estimation de la direction des vagues (Cavaleri et coll. 1981). De manière équivalente des systèmes radars ou lidar sont maintenant utilisés pour réaliser ces mesures par une mesure de temps d'aller-retour d'une onde lumineuse ou sonore, entre l'émetteur et la surface de la mer.

2. La bouée houlographe

Les accélérations verticales (pilonnement) subies par une bouée flottant en surface donnent, après une double intégration, un signal d'élévation de la surface $\zeta(x, y, t)$. Suivant le type d'instrument et la présence éventuelle d'un courant, la position horizontale (x, y) n'est pas fixe mais suit, à peu près, le mouvement orbital des vagues. Cette propriété peut être assez gênante pour les puristes de la forme des vagues car une partie de la non-linéarité de la surface est absente du signal mesuré (le mouvement Lagrangien linéaire contient une partie de la non-linéarité Eulérienne). En plus de cette mesure de pilonnement, qui a été longtemps la plus répandue, la direction des vagues peut être déterminée en faisant aussi une mesure des accélérations horizontales, qui donne, par intégration, les déplacements horizontaux x et y (figure 2). L'utilisation du positionnement précis par satellite (GPS et bientôt Galiléo) permet désormais une mesure directe de la position, ce qui peut avoir certains avantages, en particulier pour les vagues de très basse fréquence. Plusieurs modèles sont commercialisés par Oceanor et Datawell sur ce principe.

D'autres bouées, en particulier les plateformes plus grandes, utilisent plutôt une mesure des deux composantes $\partial \zeta / \partial x$ et $\partial \zeta / \partial y$, de la pente locale de la surface : tangage et roulis, comme les premiers prototypes de Longuet-Higgins et coll. (1963), Cartwright et Smith (1964). C'est le cas des bouées de 3 m de diamètre utilisées par le National Data Buoy Center (NDBC) des Etats-Unis. Les deux méthodes, accélération et tangage-roulis permettent, grâce aux covariances des 3 signaux, de déterminer les 4 premiers coefficients de Fourier de la distribution angulaire, qui sont aussi appelés moments angulaires,

– a_1 et b_1 , définis par (3.37)–(3.38) et calculés à partir des cospectres E_{xz} et E_{yz} (equations 3.28–3.29)

 $-a_2$ et b_2 définis comme a_1 et b_1 en remplaçant $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$, respectivement.

Une mesure plus complète du spectre directionnel a été mise au point, mais elle a rencontré peu de succès : la bouée en trèfle, qui consiste en 3 bouées tangage-roulis reliées entre elles. Ce curieux assemblage permet de mesurer la courbure de la surface et les coefficients de Fourier jusqu'à a_8 et b_8 . Pour une bouée classique, on est réduit à estimer la fonction $S(f, \theta)$ à partir des quatre nombres indépendants que sont a_1 , b_1 , a_2 et b_2 . On sort alors du domaine de la mesure pour entrer dans celui de la théorie des estimateurs. Parmi ces nombreuses méthodes statistiques on peut utiliser avec assez grande confiance la Méthode de l'Entropie Maximale (MEM, Lygre et Krogstad 1986) qui a l'avantage de conserver les moments angulaires a_1 , b_1 , a_2 , b_2 ... quand on manque d'information on maximise l'entropie! Lorsque les mesures sont un peu bruitées, La méthode de Lygre et Krogstad a cependant tendance à donner une forme bi-modale (avec deux maxima) qui n'est pas toujours réaliste (Benoit et coll. 1997).

D'autres techniques d'analyse sont apparues récemment pour essayer d'augmenter la résolution directionnelle de ce type de mesures. Par exemple Donelan, Drennan et Magnusson (1996) ont proposé une méthode intéressante basée sur une décomposition en ondelettes. Malheureusement, leur méthode suppose que le champ de vagues dans une gamme de fréquence donnée est à tout instant dominé par des vagues venant d'une seule direction, ce qui ne peut être prouvé. Ce type d'analyse donne une résolution angulaire étonnante mais son interprétation est délicate. De telles méthodes d'analyse non-stationnaire sont le sujet de recherches actives, en particulier pour étudier les événements transitoires et non-linéaires comme les vagues scélérates (freak waves).

3. Le capteur "P-U-V"

Comme son nom l'indique, il mesure la pression p et les deux composantes de la vitesse u, v. C'est en fait l'assemblage, de deux instruments qui sont un courantomètre (acoustique ou électromagnétique car un temps de répose rapide est nécéssaire), et d'un capteur de pression, souvent piezo-électrique. Tout l'intérêt de cet instrument est qu'il est fait pour être posé sur le fond : c'est le mouillage le plus simple que l'on puisse imaginer ... enfin, simple, si on ne se préoccupe pas des pêcheurs de coquille et autre usagers de la mer. Par ailleurs il n'est pas facile de récupérer les données en temps réel (câblage, modems acoustiques avec bouée de surface, bouée de transmission faisant du yoyo ...).

On a vu au chapitre 1 que la pression et la vitesse décroissent exponentiellement depuis la surface jusqu'au fond, avec une échelle qui est la longueur d'onde $2\pi/k$. Le "P-U-V" est donc parfait si on veut mesurer l'agitation sur le fond. Pour mesurer la hauteur des vagues on peut utiliser la théorie qui nous donne pour chaque composante spectrale les fonctions de transfert entre pression, vitesse, élévation etc. (par exemple l'équation 3.23). Dans ce cas, plus la mesure est faite près de la surface et plus elle sera précise (instrument sur une plateforme fixe ou flottante).

4. Réseaux de capteurs

De la même manière que la bouée trêfle a été conçue pour mesurer plus de covariances entre les mesures de plusieurs capteurs, on peut très bien utiliser plusieurs perches à houle. Ce type de mesure a permis d'obtenir les premiers spectres précis (Donelan, Hamilton et Hui 1985), et est en particulier utilisé pour les études sur les interactions océan-atmosphère, pour lesquelles, comme nous le verrons, le spectre des vagues courtes est déterminant (Graber et coll. 2000, Pettersson et coll. 2003). Il est primordial de coordonner les mesures pour que le réseau soit cohérent (des techniques similaires sont utilisées en SONAR et RADAR pour déterminer la provenance d'échos).

Ces techniques ont été largement appliquées à des réseaux de capteurs de pression, avec de nombreuses méthodes statistiques d'estimation du spectre (voir Davis et Regier, 1977; Long et Hasselmann, 1979; Pawka, 1983; Herbers et Guza, 1990). Un exemple de spectre est donné sur la figure 3.4, déterminé à partir d'un réseau cohérent de capteurs de pression par 8 m de fond, sur le site de l'U. S. Army Corps Field Research Facility à Duck, Caroline du Nord. De telles estimations sont d'autant plus précises que le nombre de capteurs dans le réseau cohérent est important. Les réseaux de capteurs sont donc les instruments de référence, mais il sont extrêmement cher et difficile à mettre en œuvre. Toutefois, des comparaisons on montré que pour les paramètres calculés à partir des moments a_1, b_1, a_2 et b_2 , la bouée directionnelle Datawell Waverider, par exemple, donne d'excellents résultats (O'Reilly et coll., 1996). Ce n'est que lorsqu'on a besoin de plus de détails sur la forme du spectre (séparation claire entre ondes incidentes et réfléchies, présence de plusieurs trains de houle ...) que les réseaux de viennent utile. Une variante récente et très pratique est l'utilisation de profileurs de courant (ADCP) en visée horizontale (ce qui permet la meilleure résolution angulaire, mais demande un support vertical) ou verticale. La combinaison des vitesses mesurées dans les différents faisceaux acoustiques permet, en principe, une mesure intéressante du spectre directionnel.



FIG. 3.4 – Wave spectra

(a) Exemple de spectre de vagues frequence-direction, divisé par la fréquence, calculé à partir de mesures de pression par 8 m de fond à Duck, NC, 19 October 19, 1994, 7 :00–10 :00 Eastern Standard Time (UTC-5h). (b) Spectre en fréquence correspondant, pour lequel le pic secondaire correspondant à la première harmonique du pic principal $f = 2f_p$ est probablement du à des effets non-linéaires, qui sont particulièrement importants en eau peu profonde.

5. L'altimètre satellite

 H_s est déterminé de manière indirecte à partir de la forme des échos des altimètres radar (voir par exemple Quartly., 2000), rétro-diffusés par la surface de l'océan. Les impulsion envoyées par l'antenne radar sont réfléchies par une zone de l'océan qui s'étend, si bien que la puissance de l'écho recu par l'altimètre augmente avec le temps au fur et a mesure que la zone éclairée occupe une plus grande surface. Sur l'instrument TOPEX, l'écho reçu est découpé en 128 portes de durée 3,125 ns (nanosecondes), soit une distance aller-retour parcourue de 47 cm par l'onde électromagnétique, ce signal est compressé en 64 portes pour réduire le volume des données transmises. Ainsi la résolution de l'altimètre n'est que de 47 cm. Or la précision mesurée est bien meilleure dès que la hauteur des vagues est suffisante car les échos s'étalent alors dans le temps. La figure 3.5 montre la forme d'onde moyenne mesurée par TOPEX pour une hauteur $H_s = 7$ m. La mesure altimétrique est, en 2007, la seule mesure des vagues qui soit disponible de manière globale et utilisée pour la prévision opérationnelle des vagues (par assimilation de données). La hauteur significative est déterminée par la pente de la courbe de puissance dans sa partie montante. Elle intervient aussi dans une correction importante (le biais électromagnétique, 'E-M bias' en anglais) sur l'élévation de la surface moyenne mesurée par ces altimètres. Malheureusement, avec un altimètre, on ne peut mesurer que H_s , une pseudo-période et une pente moyenne de la surface. La mesure du spectre doit utiliser d'autres techniques radar.

6. Spectres par radar

Depuis l'invention du radar il est apparu que la mer était une source importantes d'échos, dans touts les domaines radar (du décamétrique au micro-ondes), en particulier grâce aux propriétés diélectriques de l'eau de mer. Un radar actif mesure ainsi une puissance électromagnétique reçue par son antenne. Cette puissance (en Watts) est normalisée par la distance antenne-cible, la taille de l'antenne, la puissance émise. C'est la section efficace radar normalisée, notée σ_0 . σ_0 dépend de la géométrie de la surface et de la mesure (angle d'incidence, direction de visée) ainsi que des caractéristiques électromagnétiques (polarisation, longueur d'onde radar). En particulier, σ_0 dépend fortement de la longueur d'onde radar et de l'angle d'incidence des ondes radar par rapport à la surface. Un radar qui regarde verticalement vers le bas (au nadir) verra de fortes valeurs de σ_0 si la mer est lisse. En présence de vagues, on peut considérer que l'écho de la surface est la somme incohérente des échos de facettes, et, pour une distribution Gaussienne des pentes de la surface on trouve que σ_0 est proportionnel à la moyenne des pentes au carré (mean square slope ou mss en anglais).



FIG. 3.5 – Altimètre et forme d'onde

Forme d'onde moyenne pour l'altimètre TOPEX en bande Ku, et pour une hauteur $H_s = 7$ m. Les points E4, L4, E6 et L6 sont les valeurs de la puissance utilisées pour calculer, dans ce cas, la hauteur des vagues (tiré de Quartly 2000 (copyright American Meteorological Society). Les "bins" sont les portes, correspondant ici à une distance d'aller-retour de 47 cm. La montéé en puissance du signal entre les niveaux E_4 et L_4 s'étale sur une dizaine de portes, soit une distance de 4.7 m, proche de la hauteur H_{rms} . Les échos dans les portes au delà de 45 viennent de la surface de la mer qui n'est pas juste au dessous du satellite mais sur le côté et quand même éclairée par le faisceau radar.

Pour des angles d'incidence entre 20 et 50 degré (le radar regarde sur le côté) c'est le mécanisme de résonance de Bragg qui semble expliquer l'essentiel des échos. Dans ce cas l'intensité de l'écho est proportionnelle au carré de l'amplitude des éléments de rugosité (en mer : vagues, fronts déferlants ...) dont la longueur d'onde est proche de la moitié de la longueur d'onde radar (projetée sur la surface avec l'angle d'incidence local). Actuellement les mesures les plus utilisées sont dans le domaine des longueurs d'ondes centimétriques, en particulier avec les radars à synthèse d'ouverture (RSO ou SAR en anglais) sur les satellites ERS 1/2, ENVISAT et RADARSAT. Le lancement d'ERS-1 a d'ailleurs été l'occasion de nombreuses études sur la mesure du spectre des vagues afin d'utiliser ces données pour la prévision des vagues. Les mécanismes de réflexion radar sont tellement complexes que c'est seulement aujourd'hui que l'interprétation de ces données est enfin d'assez bonne qualité pour être utile à la prévision (Aouf et al. 2006).

Les longueurs d'ondes utilisées par ERS et ENVISAT étant de 5,3 cm (fréquence 5,3 GHz, bande C), le radar est sensible a des rugosités d'échelles de l'ordre de $\lambda_B = 5$ cm, dans le domaine des vagues capillaires. Or l'amplitude de ces vagues et l'angle d'incidence local sont modulés par les plus grandes vagues sous l'éffet d'interactions hydrodynamiques et par l'ajout de la pente des vagues longues (longues par rapport à λ_B). Traditionellement cet effet est décrit par une fonction de transfert de modulation M, qui est un nombre complexe, reliant les variations de σ_0 à l'amplitude et la phase d'une vague longue d'amplitude complexe $A : \sigma_0 = \text{Real}(\sigma_0(1 + MA))$. Pour de faibles modulations on applique alors ce principe à un spectre, et on trouve que le spectre $R(k_x, k_y)$ de l'image radar (la trasformée de Fourier de σ_0) est reliée au spectre d'élévation de la surface $E(k_x, k_y) = R(k_x, k_y)/|M|^2 (k_x, k_y)$. C'est le principe du radar à ouverture réelle, comme les instruments aéroporté RAWS développé par la NASA (Jackson et coll. 1985) et STORM mis au point en colloboration entre le CNRS et le CNES (Hauser et coll. 1992) et dont une nouvelle version, SWIM, devrait voler sur le China-France Ocean Satellite (CFOSAT).

7. Synthèse d'ouverture

On sait bien séparer les échos dans la direction de visée en utilisant le temps d'aller-retour (delay en anglais) des ondes, c'est le principe de l'altimètre, par contre dans l'autre direction (azimuth), tous les échos arrivent en même temps. Une solution est offerte par la technique de la synthèse d'ouverture. Il s'agit d'utiliser la variation du décalage Doppler des échos en fonction de leur position en azimuth : un écho qui vient de devant possède une fréquence plus élevée qu'un écho qui vient de l'arrière. C'est



FIG. 3.6 – En haut : extrait d'une image SAR acquise le 9 mars 2003, baie de Cancale. Le niveaude gris est une fonction de la section efficace radar, qui est modulée par les vagues, en particulier autour de la pointe du Grouin. En bas, carte des hauteurs de vagues et direction moyennes calculées à partir des spectres de vagues extrait de l'image (Les points marqués AWA et SA1 sont des points de mouillage d'instruments in-situ utilisés pour la validation de la mesure des spectres par le SAR, voir Collard, Ardhuin et Chapron 2005).

très bien si les cibles (la surface océanique) ne bougent pas, on peut alors obtenir une bonne résolution (de l'ordre de 10 m pour ENVISAT), à la fois sur la direction de visée (range) et sur la direction de vol du satellite (azimuth). Et on obtient donc une carte 'delay-doppler' ou les échos forment une image car il sont positionnés suivant leur temps d'aller-retour et leur décalage Doppler. Malheureusement ces positions ne sont pas de vraies positions géographiques si la surface bouge... ce qui est le cas en présence de vagues. On a alors le mécanisme de 'velocity bunching' : les échos sur l'image sont déplacés de leur position réelle en fonction de leur vitesse sur l'axe de visée du satellite. Ce mécanisme est souvent la principale cause de la modulation de σ_0 par les vagues (figure 3.6). Tant que le déplacement des pixels est inférieur à la longueur d'onde il peut aussi être décrit par une fonction de transfert de modulation (M_{vb}) . En pratique M_{vb} est proportionnel à la vitesse orbitale dans la direction de visée. A partir d'une certaine valeur de M_{vb} , on ne voit plus les vagues sur l'image. Ainsi les composantes spectrales de faible longueur d'onde qui se déplacent dans la direction azimuthale sont invisibles). Cette coupure azimuthale (azimuth cut-off) est la cause principale de la limitation de l'utilisation du SAR (Kerbaol, Chapron et Vachon 1998). Ainsi, dès que le vent est un peut fort, des vagues courtes avec une vitesse orbitale relativement élevée empêchent de voir la partie du spectre qui se propage dans la direction azimuthale, sauf pour les houles les plus longues. Dans certains cas exceptionnels de vent faible, on peut mesurer des vagues courtes dans la direction azimuthale qui sont visible grâce aux modulation de l'angle d'incidence par la pente de la surface (figure 3.6, autour de SA1).

Enfin, toute image de la surface est forcément ambigüe quant à la direction de propagation des vagues. Afin de lever cette ambiguïté on peut utiliser le temps d'intégration du radar : l'image n'est pas tout à fait un instantané et en utilisant plusieurs séquences consécutives de l'enregistrement on est capable de recréer plusieurs images de la surface vue à quelques dixièmes de seconde d'intervalle. Ces différentes vues sont aussi utilisées pour améliorer la qualité du spectre qui est alors calculé par corrélations entre vues, ce qui permet de réduire considérablement le bruit (Engen et Johnsen 1995, Chapron, Johnsen et Garello 2001).

8. Radar en incidence rasante

L'existence du fouillis de mer (sea clutter) sur les images des radars de navigation est la limitation principale à la détection des navires. Depuis plusieurs années ce fouillis de mer a été mis à profit pour en tirer une mesure des vagues. On utilise alors un radar de navigation classique, en bande X ($\lambda \simeq 3$ cm) sur un navire ou une station à terre. L'angle d'incidence est alors rasant et, en plus de la modulation des vagues de Bragg, on voit aussi apparaître l'ombre portée par les vagues. Malgré les forts effets non-linéaires liés aux ombres, les techniques de calcul du spectre utilisent une fonction de transfert de modulation (figure 3.7). Par ailleurs, afin de réduire le bruit et d'estimer la direction de propagation des vagues l'analyse utilise une séquence de plusieurs images. On peut ainsi calculer le spectre en trois dimensions (fréquence et nombres d'ondes), et en utilisant la relation de dispersion pour les vagues linéaires, filtrer tout ce qui s'en écarte. Ce type de système donne généralement une bonne distribution spectrale de l'énergie mais sa faiblesse est la détermination du gain, le facteur de proportionnalité entre le spectre de l'image radar et le spectre de l'élévation de la surface. Une mesure complémentaire (altimètre, tangage / roulis d'un bateau) peut fournir ce gain de manière indépendante.

9. Radar à onde de surface

Un cas extrême d'incidence rasante se produit quand les ondes radars se propagent le long de la surface. Ce type de propagation est possible dans le domaine HF-VHF (de 2 à 50 MHz). L'avantage de cette onde de surface est qu'elle permet d'observer au delà de l'horizon. Il semble que la réflexion de l'onde radar soit bien décrite par une théorie de Bragg (Barrick 1972), si bien que le spectre Doppler observé peut être interprété comme la superposition de réflexions simples (dites de premier ordre) et multiples. L'extraction de spectres d'état de mer est possible à partir du second ordre qui est une convolution du spectre (voir par exemple Wyatt 2000). Ces échos de second order sont plus faibles que les échos du premier ordre aux fréquences de Bragg (figure 3.8).



FIG. 3.7 – Exemples d'images radar acquises avec un système WaMoS, commercialisé par Oceanwaves GmbH, sur le bâtiment hydrographique Laplace. Les mesures ont été faites en mars 2003 avec une forte houle d'ouest ($H_s = 6 \text{ m}, T_p = 16 \text{ s}$). Le spectre montré ici est obtenu à l'abri d'Ouessant. On remarque que la houle forme deux trains qui contournent les îles par le sud et par le nord.



FIG. 3.8 – Exemple de spectre rétro-diffusé reçu par un radar HF. Les deux fréquences ω_b et $-\omega_b$ sont les fréquences de Bragg. Les principaux pics mesurés (flèches) sont légèrement décalés à cause du courant. Les pics secondaires correspondent aux échos de second ordre (tiré de Green 2003).

E. Les limitation de la description des vagues par un spectre

Le spectre décrit l'ensemble des propriétés statistiques des vagues si les composantes sont effectivement indépendantes. Or ce n'est pas tout à fait vrai car les vagues sont faiblement non-linéaires. Il existe deux grandes catégories de relations entre composantes : la présence d'harmoniques et les modulations. Le premier effet vient du fait qu'un seul train de vagues non-linéaire correspond à plusieurs composantes spectrales dont le nombre d'onde et la fréquence sont des multiples de ceux de la porteuse. Rigoureusement il faudrait avoir le spectre tridimensionnel $E(\mathbf{k}, f)$ pour discerner ces harmoniques qui ne vérifient pas la relation de dispersion, de la partie linéaire, cela demande des moyens de mesure spécifiques. Il semble que ce filtrage puisse toutefois se faire en utilisant la technique de calcul du spectre nu et habillé de Elfouhaily et coll. (2003), le spectre nu étant le spectre de la partie linéaire et son habillage correspondant à la partie non-linéaire. C'est le sujet de recherches actuelles.

La modulation est un peu plus compliquée. Typiquement des vagues courtes en présence de vagues beaucoup plus longues voient le milieu modifié. La gravité apparente pour les vagues courtes est la gravité plus l'accélération verticale liée au mouvement des vagues longues. De même, la vitesse orbitale des vagues longues agit comme un courant variable pour les vagues courtes et la profondeur est elle aussi modulée. Ces effets sont probablement la cause du déferlement préférentiel des vagues courtes sur les crêtes des vagues longues. Le spectre des vagues courtes est alors modulé par celui des vagues longues. En pratique, dans la mer du vent, de tels effets sont assez faibles pour des vagues de fréquence inférieure à trois fois la fréquence du pic spectral. Ce facteur 3 sur la fréquence, correspond à un facteur 9 sur les longueurs d'onde (en eau profonde).

IV. PARAMÈTRES PRINCIPAUX ET SPECTRES OBSERVÉS

Une simple observation de l'océan permet de se rendre compte assez facilement que plus le vent souffle fort, plus la hauteur H et la longueur d'onde L des vagues sont importantes. On observe aussi assez vite que L et H varient avec la taille du plan d'eau considéré : un grand lac peut avoir des vagues plus grandes qu'une mare, et dans l'océan on peut observer des vagues jusqu'à environ 40 m de haut et de longueurs d'onde supérieure à 600 m. On voit enfin que la hauteur des vagues augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne du rivage dans le sens du vent.

A. Croissance avec le fetch

Ces observations élémentaires ont été systématiquement rassemblées par Sverdrup et Munk, dès 1941, afin d'élaborer une méthode de prévision pour les forces alliées (leur travaux, d'abord secrets, n'ont été publiés qu'en 1947). Ils ont ainsi organisé des observations aussi disparates que celles faites dans des étangs et au milieu de l'océan en utilisant l'analyse dimensionnelle avec les variables élémentaires que sont H, T, U_{10} (la vitesse du vent à 10 m au dessus de l'eau), le fetch X, la durée du coup de vent t et la gravité g. Le fetch est la longueur de l'aire génératrice sur lequel les vagues ont été activement générées, ce qui n'est pas facile à définir en pratique. Le choix de U_{10} comme variable représentant la force du vent est relativement arbitraire. De nombreuses études ont longuement débattu du fait que la vitesse de frottement dans l'air $u_{\star a} = (\tau_a/\rho_a)^{1/2}$ était probablement plus pertinente, mais l'étalement des observations est tout aussi important avec cette variable et comme U_{10} est plus souvent mesuré que $u_{\star a}$, il est plus facile à utiliser.

En considérant des cas de vent uniforme, constant, et soufflant perpendiculairement à la côte, Sverdrup et Munk ont trouvé que l'on peut exprimer $E^* = H^2 g^2 / U_{10}^4$, qui est un nombre sans dimensions, en fonction de $X^* = Xg/U_{10}^2$ et $t^* = tg/U_{10}$. Et de même pour $1/f_p^* = Tg/U_{10}$. Pour des vagues aléatoires, on utilise maintenant $E^* = Eg^2/U_{10}^4$ et $f_p^* = f_p U_{10}/g$ avec E et f_p la variance de l'élévation de la surface et la fréquence au pic spectral, respectivement. La figure (4.1) montre les valeurs observées pour $t^* > 10^5$ (la durée peut alors être considérée comme infinie) lors de la campagne SHOWEX de 1999, au large de la Caroline du Nord, en comparaison avec les observations moyennes de campagnes précédentes.

Malgré l'apparente simplicité de la situation considérée, des écarts importants subsistent entre les différents jeux de données, en partie à cause des incertitudes sur les variations du vent qui n'est jamais rigoureusement stationnaire ou uniforme. Un travail minutieux de comparaison (Kahma et Calkoen 1992, Young 1998) indique qu'une partie des différences entre les observations serait liée à la différence de température entre l'air et l'eau. La cause physique n'est pas encore élucidée, mais comme on le verra au chapitre suivant la croissance des vagues dépend de la variation verticale du vent, qui est influencée par la stabilité. Par ailleurs, une plus forte variabilité du vent (rafales) est associée aux conditions instables ($T_{air} < T_{mer}$), ce qui peut fortement augmenter l'énergie des vagues pour les mers complètement développées ($X^* > 10^4$, voir Abdalla et Cavaleri 2002). On peut enfin imaginer que la génération d'ondes internes, dans l'eau, puisse absorber une partie de l'énergie des vagues en cas de stratification stable (l'océan étant aussi probablement stratifié), mais aucune étude n'a été faite sur le sujet, ce n'est pas le travail qui manque.



FIG. 4.1 – Croissance des vagues avec le fetch, mesures de la campagne SHOWEX. La direction du vent légèrement oblique (20° par rapport à la direction perpendiculaire à la côte) produit un double pic de la mer du vent pour les fetchs courts. Près de la côte, on peut ainsi séparer une partie haute fréquence (en rouge) qui est dans la direction du vent de l'ensemble de la mer du vent (en noir).

B. Développement complet et âge des vagues

Pour les grandes valeurs du fetch l'énergie et la fréquence semblent tendre vers une limite asymptotique. Malheureusement les fetchs infinis n'existent pas en pratique et il y a très peu d'observations avec un vent uniforme et stationnaire pour $X^* > 10^4$. Ainsi, Pierson et Moskowitz (1964) ont dû sélectionner avec beaucoup de soin 55 observations de navires météorologiques pour obtenir les valeurs asymptotiques $E^* = 0.00402$ et $f_p^* = 0.123$. Une ré-analyse récente de ces observations (Alves et coll. 2003) confirme que les fetchs pouvaient effectivement être considérés comme infini.

L'état de développement des vagues est plus souvent décrit par l'âge des vagues C_p/U_{10} avec la vitesse de phase au pic, $C_p = 2\pi f_p/k_p$. Ce paramètre permet, pour un état de mer donné de séparer la mer du vent qui est activement générée par le vent (vagues jeunes) de la houle sur laquelle le vent n'a presque pas d'effet (vagues âgées). Donelan et coll. (1992) ont montré que la croissance des vagues s'arrêtait pour $C_p/U_{10} = 1.2$, ce qui confirme les analyses de Pierson et Moskowitz (1964). On remarque que pour une mer pleinement développée les vagues correspondant au pic spectral se propagent légèrement plus vite que la vitesse du vent.

1. Limitation par le fetch

On peut alors essayer de formuler une loi de croissance des vagues par fetch limité sous la forme suivante, donnée par Elfouhaily et coll. (1997), avec $X_0^{\star} = 2.2 \times 10^4$,

$$U_{10}/C_p = 0.84 \left(\tanh\left(\frac{X^{\star}}{X_0^{\star}}\right)^{0.4} \right)^{-0.75}, \qquad (4.1)$$

$$H_s = 0.26 \frac{U_{10}^2}{g} \left(\tanh\left(\frac{X^*}{X_0^*}\right)^{0.4} \right)^{1.25}.$$
 (4.2)

Au vu des incertitudes et du peu de mesures pour $X_0^\star \simeq X^\star$, on peut aussi utiliser,

$$U_{10}/C_p = 0.84 \left(\min\left\{ \frac{X^*}{X_0^*}, 1 \right\} \right)^{-0.3}, \tag{4.3}$$

$$H_s = 0.26 \frac{U_{10}^2}{g} \left(\min\left\{\frac{X^*}{X_0^*}, 1\right\} \right)^{0.5}.$$
(4.4)

La transition abrupte entre croissance et développement complet qu est donnée par l'utilisation du minimum au lieu de la fonction tanh est en outre compatible avec les observations de Walsh et al. (1989).

2. Limitation par le temps

Si le vent est établi depuis peu de telle sorte que $t^* < 10^5$, l'état de développement des vagues peut être approximativement trouvé en recalculant l'inverse de l'âge U_{10}/C_p et H_s en remplaçant X^* par $X' = (t^*/70)^{1.3}$ (voir CERC 1977) et en prenant la valeur la plus faible (plus forte) des deux valeurs trouvée pour H_s (pour U_{10}/C_p), respectivement. Pour une évaluation plus précise et une validation avec des observations, le lecteur pourra consulter Hwang et Wang (2004).

C. Spectres en fréquence

1. Les pionniers

Les premières mesures de spectres furent réalisées en 1944 par le Group W de l'Amirauté Britannique, après le débarquement en Normandie (Barber et al. 1946, voir Ursell 1999 pour un récit historique). Ces observations et celles qui suivirent firent ressortir que, pour les fréquences au-delà du pic, le spectre a généralement toujours la même forme. Phillips (1958) introduisit la notion de zone d'équilibre pour décrire la forme du spectre pour $f > f_p$, et proposa que seule la gravité déterminait la



FIG. 4.2 – Evolution du spectre avec le fetch.

A gauche, spectres mesurés le 15 septembre 1968 à 11
h pendant JONSWAP. Les chiffres indiquent le fetch en kilomètres. A droite, spectres mesurés le 3 novembre 1999 de 13
h à 17
h pendant SHOWEX, l'échelle est logarithmique. Dans le cas de SHOWEX, le vent était d'environ 10 m/s, à 20 degrés de la perpendiculaire à la côte. Le pic autour de f=0.1 Hz est une houle arrivant de l'Atlantique, face au vent. Pour l'instrument correspondant au fetch le plus court, les deux pics de la mer du vent, 0.45 et 0.25 Hz, correspondent respectivement à des vagues se propageant dans la direction du vent, et le long de la côte. Cette dernière composante existe grâce a l'angle de 20° entre le vent et la perpendiculaire à la côte.

forme du spectre, ce qui par analyse dimensionelle le conduisit à proposer la forme suivante

$$E(f) = \alpha_P \left(2\pi\right)^{-4} g^2 f^{-5}, \tag{4.5}$$

avec $\alpha_P \approx 0.08$ la constante de Phillips. C'est ce type de concept qui conduisit Pierson et Moskowitz (1964) à proposer la forme suivante pour synthétiser leurs observations de mers pleinement développées, sur l'ensemble de la gamme de fréquence,

$$E(f) = E_{PM}(f) = \alpha_P g^2 \left(2\pi\right)^{-4} f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right],$$
(4.6)

Il est apparu ultérieurement que pour les fetch limités la forme du spectre pouvait être assez différente, en particulier le pic est plus étroit par fetch court. Par ailleurs, les valeurs de E(f) pour f fixé peuvent être plus élevées que les valeurs observées pour une mer pleinement développée : il s'agit du phénomène de sur-croissance du pic, observée par Barnett et Sutherland (1968, on parle d'overshoot' en anglais.) et particulièrement mis en évidence par l'expérience de 1968-1969 du Joint North Sea Wave Project (JONSWAP, voir Hasselmann et coll. 1973, figure 4.2). Un terme d'amplification du pic fut donc rajouté,

$$E(f) = E_{PM}(f)\gamma^{\exp\left[\frac{-(f-f_P)^2}{2\sigma_{A/B}^2 f_P^2}\right]}.$$
(4.7)

On pourrait penser que l'imagination était un peu débordante à cette époque pour parvenir à une forme aussi compliquée, mais, en regardant de près, chaque paramètre joue un rôle assez clair. $\gamma \simeq 3.3$ est le facteur d'amplification du pic, tandis que $\sigma_{A/B}$, qui prend pour valeur $\sigma_A \simeq 0.07$ si $f < f_p$ et $\sigma_B \simeq 0.09$ sinon, donne la largeur relative autour de f_p qui est affectée par l'amplification du pic. En utilisant (4.7) et (4.3) on peut alors calculer C_p puis $f_p = g/(C_p 2\pi)$ en fonction du vent et du fetch. On obtient alors un spectre moyen correspondant aux observations des campagnes JONSWAP.

2. L'ère moderne

L'histoire ne s'arrête pas là. En effet, de nombreuses observations, à commencer par celles de Toba (1973), montrent que pour les fréquences entre f_p et $3f_p$, la décroissance du spectre E(f) est



FIG. 4.3 – Quelques formes spectrales pour $U_{10} = 10 \text{ m s}^{-1}$ et X = 50 km. A gauche : en coordonnées linéaires, et à droite, mêmes spectres en coordonnées logarithmiques. La pente des courbes sur le diagramme logarithmique de droite donne l'exposant n de la relation $E(f) \propto f^{-n}$. On remarque ainsi la transition de n = 4 pour $f < 2f_p$ vers n > 5 au delà. A noter que le spectre DHH a été artificiellement prolongé en dehors de sa gamme de validité, pour $f > 3f_p$ afin de mieux visualiser sa pente en f^{-4} .

plutôt de la forme f^{-4} . Toba explique cette forme par le fait que la constante de Phillips n'est pas tout à fait constante et que le niveau de saturation du spectre à haute fréquence dépend aussi de la vitesse du vent, variable qui n'avait pas été prise en compte par Phillips (1958). Par ailleurs, des considérations théoriques sur les effets non-linéaires donnent aussi une forme en f^{-4} . La décroissance du spectre en f^{-4} au voisinage du pic spectral a été particulièrement bien vérifié par les observations de Donelan, Hamilton et Hui (DHH 1985), faites sur une plateforme de recherche dans le lac Erie avec un réseau de perches à houles permettant, pour la première fois, de mesurer directement le spectre en nombre d'onde et direction. De plus la forme spectrale proposée par DHH a le mérite de réconcilier l'amplification du pic du spectre JONSWAP avec les spectres développés de Pierson et Moskowitz (1965). L'équation (4.3) adaptée de Elfouhaily et coll. (1997) pour donner l'âge des vagues permet de plus d'obtenir les bonnes asymptotes pour l'énergie et la période.

Comme cette discussion porte sur la forme du spectre au delà du pic, dans un domaine fréquentiel où l'énergie est moindre, on pourrait considérer que ce n'est pas très important. Or cette partie du spectre est celle qui reçoit le plus d'énergie du vent, et elle influence fortement la partie très haute fréquence qui est capitale pour l'interprétation de la télédétection. En particulier, les mesures de réflexion de lumière du soleil faites par Cox et Munk (1954) donnent une très bonne estimation de la moyenne du carré des pentes de la surface (mean square slope ou mss),

mss =
$$\int k^2 E(k_x, k_y) dk_x dk_y = \int \frac{(2\pi f)^4}{g^2} E(f) df.$$
 (4.8)

Pour que cette mss soit finie il est clair que E(f) doit décroître plus vite que f^{-5} à haute fréquence. Elfouhaily et coll. (1997) et Kudryavtsev, Makin et Chapron (KMC 1999) ont ainsi inposé une forte décroissance spectrale pour $k > 10k_p$, fondée sur des observations, et ajouté, pour ces hautes fréquences, un paramétrage du spectre des vagues de gravité-capillarité. Quelques formes spectrales sont comparées en figure 4.3 dans le domaine des ondes de gravité.

D. Spectres directionnels

La forme des spectres en fréquence est encore le sujet de discussions (voir par exemple Lemaire et Sobieski 1999, Caudal 2002) en particulier dans sa partie haute fréquence qui est très importante pour la réflexion d'ondes radar ou l'émissivité micro-ondes et infrarouge. Pour la forme directionnelle des vagues les incertitudes sont bien plus grandes, même au niveau du pic spectral, en particulier à cause du faible nombre d'observations directionnelles de bonne qualité. Le spectre fréquence-direction $E(f, \theta)$ se décompose de manière usuelle en

$$E(f,\theta) = E(f)S(f,\theta) \tag{4.9}$$

avec la fonction de répartition angulaire normalisée par

$$\int_0^{2\pi} S(f,\theta) \mathrm{d}\theta = 1. \tag{4.10}$$

Les premières paramétrisations de $S(f, \theta)$ (Longuet-Higgins, Cartwright et Smith, 1963) utilisaient une forme du type

$$S(f,\theta) = \cos^{2s} \left((\theta - \theta_m)/2 \right) \tag{4.11}$$

qui est symétrique par rapport à la direction moyenne θ_m et d'autant plus étroite que *s* est grand. Les observations montrent que l'étalement directionnel, qui est mieux défini par le paramètre σ_{θ} (défini au chapitre III), est minimum au pic spectral et augmente vers les basses et hautes fréquences. La direction moyenne, même pour la mer du vent, peut être sensiblement différente de la direction du vent, en particulier dans des de fetch limité avec un vent qui n'est pas perpendiculaire à la côte (figure 4.6).

A partir d'une analogie avec des groupes de vagues non-linéaires, Donelan, Hamilton et Hui (1985) ont proposé une forme du type,

$$S(f,\theta) \propto \frac{1}{\cosh^2 \left[\beta \left(\theta - \theta_m\right)\right]}$$

$$(4.12)$$

avec $\beta = 2.44(f/0.95f_p)^{1.3}$ pour $0.56 < f/f_p < 0.95$ et $\beta = 2.44(f/0.95f_p)^{-1.3}$ pour $0.95 < f/f_p < 1.6$. Au delà de $1.6f_p$ leurs observations ne permettait pas de déterminer $D(f,\theta)$. Grâce a des mesures complémentaires, Banner (1990) a proposé $\beta = 10^{-0.4+0.8393} \exp[-0.567 \ln(f/f_p)^2]$ pour $f/f_p > 1.6$. Or les observations de Young, Verhagen et Banner (1995) puis Ewans (1998) ont clairement établi que la répartition directionnelle pour $f > f_p$ avait généralement deux pics de part et d'autre de la direction du vent (figure 4.4). On parle de distribution bi-modale. A haute fréquence $(f > 3f_p)$ ces pics sont à environ 40° de part et d'autre de la direction du vent. Malheureusement cette nature bi-modale du spectre n'a pas encore été prise en compte dans les nombreuses études qui sont évoquées ci-dessous.

Même en ajustant les paramètres s et β , les formes en \cos^{2s} et $1/\cosh^2$ sont assez différentes. On peut s'en rendre compte en calculant l'étalement directionnel σ_{θ} et le moment directionnel a_1 ou encore le paramètre Δ (Elfouhaily et coll. 1997) défini par

$$\Delta(f) = \frac{S(f,0) - S(f,\pi/2)}{S(f,0) + S(f,\pi/2)},\tag{4.13}$$

et représentés sur la figure 4.5.

Pour des applications de télédétection la forme $1/\cosh^2$ est la plus utilisée car elle contient des vagues qui se propagent contre le vent, ce qui est cohérent avec les observations radar, en particulier radar HF. Dans le cas général le spectre de la mer du vent est le plus étroit au pic. La houle peut aussi avoir un spectre encore plus étroit (figure 4.6), avec des valeurs de σ_{θ} parfois inférieures à 10°.



FIG. 4.4 – Spectre moyen observé à Currituck sound par les services du U.S. Army Corps of Engineers, pour $U_{10} > 7 \text{ m s}^{-1}$. Les spectres on été normalisés pour mettre le pic au même niveau (Figure tirée de Long et Resio 2007).



 $\label{eq:FIG.4.5-Paramètres d'étalement directionnel.}$ En haut pour la forme en $1/\cosh^2$ de DHH, et en bas pour la forme en $\cos^{2s}.$



FIG. 4.6 – Exemple de paramètres spectraux observés

Croissance par fetch limité lors de SHOWEX, le 3 Novembre 2003, en présence d'une houle opposée. Le vent vient du 270° (-90°) et la cote est face au 70° ou -110°. On remarque particulièrement la séparation des différents systèmes de vagues par un maximum local de σ_{θ} .

E. Synthèse

1. Paramètres déterminants

On a vu que les paramètres essentiels gouvernant la forme du spectre autour du pic de la mer du vent sont

– la vitesse du vent U_{10}

– le fetch X

- la durée t depuis laquelle le vent est établi.

D'autres paramètres secondaires sont aussi importants et peuvent même dominer le résultat

- la profondeur D
- la géométrie de l'aire génératrice (fetch area geometry)
- la stabilité air-mer $T_a T_{mer}$ et son corrolaire qui est l'intensité des rafales (gustiness).
- les courants.
- la pluie

Si l'influence des paramètres principaux est assez bien comprise, les paramètres 'secondaires' empêchent de donner une forme simple du spectre et on aura en général recours à la modélisation numérique. Pour ce faire, nous allons disséquer, dans les trois chapitres suivants les processus qui contribuent à la modification de l'état de la mer. Par la suite, on parlera peu de la partie haute fréquence du spectre (au delà de 0.5 Hz) qui est si importante pour la télédétection. Les mêmes concepts peuvent s'y appliquer, avec des effets supplémentaires liés à la tension de surface, sensibles à la présence de films chimiques en surface, qu'ils soient d'origine naturelle ou humaine.

De manière générale, on peut espérer obtenir un spectre de bonne qualité pour la houle et la mer du vent par modélisation numérique, à partir des résultats théoriques et expérimentaux présentés dans les chapitres suivants. La partie haute fréquence du spectre doit pouvoir se déduire de cette partie basse fréquence en fonction des paramètres locaux que sont la tension de vent, la température et la présence de films en surface. C'est l'approche envisagée actuellement à Ifremer pour l'extraction du signal lié à la salinité dans les futures mesures de température de brillance (missions SMOS et Aquarius). Une telle approche est aussi susceptible de fournir une bonne estimation du biais électromagnétique pour les altimètres, actuellement corrigé de manière statistique, et du biais de pente pour la mesure du courant par radar à synthèse d'ouverture (Chapron, Collard et Ardhuin 2005). Ce travail demandera probablement un long de travail de validation des modèles numériques un effort de recherche sur les mécanismes d'évolution des vagues, qui, nous allons le voir tout de suite, sont loin d'être complètement élucidés.

2. Forme spectrale

Les spectres observés en mer sont très variables, en particulier près des côtes ou la limitation par le fetch conduit à une variation de la direction moyenne en fonction de la fréquence. Par ailleurs, dans l'océan, des systèmes de houle, générés par des tempêtes lointaines, sont souvent surimposés à la mer du vent, générée localement. Pour la mer du vent, le spectre présente un pic bien marqué à la fréquence f_p où l'étalement directionnel est minimum, suivi par une décroissance en f^{-4} jusqu'à 2 à 3 fois f_p , au delà duquel le spectre décroît plus rapidement. Pour l'aspect directionnel, il convient de remarquer qu'un faible niveau d'énergie est toujours observé dans toutes les directions, même dans la direction opposée au vent, et que dans des conditions stationnaires pour des fetches assez courts, le spectre présent une bimodalité assez marquée avec deux maxima symmétriques à des directions qui s'éloignent de la direction du vent quand on parcourt le spectre du pic f_p vers les hautes fréquences.

Cette forme spectrale est le résultat des procéssus de forçage des vagues qui peuvent être décrits par une équation d'évolution du spectre, comme nous allons le voir.

V. GÉNÉRATION DES VAGUES ET ÉVOLUTION AU LARGE

Il est clair depuis longtemps que les vagues tirent leur énergie E du vent et la perdent, en la donnant à la turbulence océanique, essentiellement par déferlement. On a vu aussi que la quantité de mouvement transportée par les vagues E/C est proportionnelle à cette énergie. La génération des vagues par le vent est ainsi associée à un flux quantité de mouvement horizontale entre l'atmosphère et les vagues, cela représente généralement 70% ou plus de la tension de vent. Cette part de la tension de vent est communiqué a la circulation (les courants moyens) par la dissipation des vagues. On verra aussi que la dynamique intrinsèque du champ de vagues, liée à sa faible non-linéarité, est le troisième élément important de l'évolution des vagues au large.

A. Génération des vagues par le vent

Pour qu'il y ait un transfert d'énergie de l'atmosphère vers les vagues il faut que le travail des contraintes à la surface soit différent de zéro. Nous allons voir que cela fait intervenir soit des variations de pression à la surface qui sont en phase avec la pente des vagues, soit des variations de tension de cisaillement en phase avec la vitesse orbitale (et donc l'élévation) soit les deux. Afin de quantifier ce travail il faut alors identifier les mécanismes qui créent ces variation de pression et/ou de tension de cisaillement. Historiquement, les premières hypothèses sur les mécanismes de formation des vagues ont fait appel à des instabilités : l'écoulement du vent au dessus d'une surface d'eau complètement plane est un cas d'écoulement cisaillé en milieu stratifié, donc sujet à une instabilité de Kelvin-Helmoltz lorsque le cisaillement est assez important. Cette instabilité peut se développer pour des vitesses U du vent supérieures à 6,5 m s⁻¹ (Jeffreys 1925), mais en pratique on observe déjà des rides à la surface pour expliquer les observations du taux de croissance des vagues.

On abordera ici les trois grandes catégories de théories qui ont été proposées pour expliquer la génération des vagues. Il existe bien d'autres points de vue sur ce mélange complexe d'ondes et de turbulence.

1. Pression dans l'air et croissance des vagues

L'interaction entre l'air et l'eau peut se faire par des forces de pression ou des contraintes de cisaillement. L'ensemble des observations indiquent que la pression domine, nous allons donc nos concentrer sur l'effet de la pression atmosphérique. On pourra ensuite ajouter les effets des tensions de cisaillement.

En ajoutant la pression atmosphérique $p_a,$ variable, dans l'équation de Bernoulli linéarisée pour $z=\zeta$ on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} - g\zeta - \frac{1}{\rho}p_a, \quad \text{sur} \quad z = 0,$$
(5.1)

En prenant la transformée de Fourier spatiale, une forme générique des fluctuations de pression est

$$p_a(t) = \mathcal{R}\left[\mathrm{i}dP_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right],\tag{5.2}$$

avec $dP_a(t)$ une fonction réelle et $idP_a(t)$ l'amplitude complexe. En posant $\Theta = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ on a $p_a(t) = -dP_a(t) \sin \Theta$.

Puisque l'équation de Laplace et la condition à la limite au fond sont inchangées, ϕ est encore de la forme, $\phi = \mathcal{R} \left(d\Phi e^{i\Theta} \right) \cosh(kz + kh) / \cosh(KD)$. On peut ainsi remplacer ϕ via la condition cinématique en surface, pour obtenir une équation d'évolution pour l'amplitude dZ définie $\zeta = \mathcal{R} \left(dZ e^{i\Theta} \right)$. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur forcé (Phillips 1957, eq. 2.11),

$$\frac{\partial^2 dZ}{\partial t^2} + \sigma^2 Z = -\frac{\mathrm{i}\sigma^2 dP_a}{\rho_w g},\tag{5.3}$$





La croissance des vagues par le vent pour $U \gg C$ et U < C est actuellement assez bien expliquée par la théorie de Jeffreys (1925) revue par Belcher et Hunt (1993). Pour 1 < U/C < 3 il semble que la théorie de Miles sur le niveau critique soit en bon accord avec les observations, en particulier de Hristov et coll. (2003). La théorie de Phillips (1957) sur la croissance par résonance avec la turbulence atmosphérique pourrait expliquer la croissance initiale des vagues, mais elle ne peut expliquer la phase principale de croissance des vagues.

avec $\sigma^2 = gk \tanh(kD)$.

Il s'agit donc de déterminer la forme des fluctuations de pression $dP_a(t)$ et de calculer la réponse de l'océan à ce forçage. On peut tout d'abord prendre une forme générique des fluctuations de pression,

$$p_a(t) = \mathcal{R}\left[\mathrm{i}dP_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta'}\right],\tag{5.4}$$

avec $\Theta' = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma' t).$

a. Pression sinusoïdale résonante

Dans le cas $\sigma' = s\sigma$, avec $s = \pm 1$, la solution générale de (5.3) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale sans second membre, soit

$$dZ(t) = -\frac{dP_a}{2\rho_w g} s\sigma t \cos\Theta' + A\sin\Theta_1 + B\sin\Theta_2 + C\cos\Theta_1 + D\cos\Theta_2.$$
(5.5)

avec $\sigma^2 = gk \tanh(KD)$, $\Theta_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)$, $\Theta_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \sigma t)$. A, B, C et D sont des constantes que l'on peut déterminer en se donnant les conditions initiales.

En prenant $\zeta = 0$ et $\partial \zeta / \partial t = 0$ pour t = 0, on trouve C = D = 0, et, pour s= 1, $A = -dP_a/(2\rho_w g)$, B = 0, tandis que pour s = -1, A = 0 et $B = dP_a/(2\rho_w g)$.

On remarque que l'amplitude des vagues croît linéairement, et que le terme croissant de l'élévation de la pression est en quadrature de phase avec la pression. La densité spectrale d'énergie est $E(\mathbf{k}) = |dZ|^2 / d\mathbf{k}$, et on peut relier sa variation à celle de la densité spectrale de pression $\Pi(\mathbf{k}) = |dP_a|^2 / (d\mathbf{k})$. Ainsi, le flux d'énergie entre l'air et l'eau est, en négligeant le terme venant de A ou B,

$$\rho_w g \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} = \frac{\sigma^2 t \Pi(\mathbf{k})}{2\rho_w g},\tag{5.6}$$

qui s'exprime en Watts pour les unités du système international, de telle sorte que l'intégrale sur l'ensemble des nombres d'ondes est bien un flux en Watts par mètre carré. Ce flux est logiquement

A. GÉNÉRATION DES VAGUES PAR LE VENT

égal au travail des forces de pression sur la surface, produit de la vitesse normale à la surface (normale rentrante) par la pression. Pour des pentes faibles la normale est quasiment verticale, et seule la vitesse verticale $w(\zeta) = \partial \zeta / \partial t$ travaille,

$$\rho_w g \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} = -\left\langle \frac{\partial dZ}{\partial t} \overline{dP_a} \right\rangle. \tag{5.7}$$

Ainsi le décalage de phase entre la pression et l'élévation permet justement à l'atmosphère d'appuyer vers le bas là où la surface descent, et à aspirer la ou la surface monte, ce qui donne un flux net d'énergie.

De la même manière la quantité de mouvement des vagues $\mathbf{k}\rho_w gE(\mathbf{k})/\sigma$ augmente elle aussi, avec un flux égal à la force moyenne exercée sur la surface. Cette force est la force de pression projetée sur l'horizontale, donc le produite entre la pression et la pente de la surface $\mathcal{R}(\mathbf{i}\mathbf{k}dZ)$,

$$\frac{\rho_w g \mathbf{k}}{\sigma} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} = \mathbf{k} \left\langle \mathrm{i} d Z \overline{d P_a} \right\rangle.$$
(5.8)

b. Pression sinusoïdale non-résonante

De la même manière, dans le cas $\sigma'^2 \neq \sigma^2$, la solution générale de (5.3) est de la forme

$$\zeta(t) = -\frac{P_a}{\rho_w g} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - {\sigma'}^2} \sin \Theta' + A \sin \Theta_1 + B \sin \Theta_2 + C \cos \Theta_1 + D \cos \Theta_2.$$
(5.9)

En prenant $\zeta = 0$ et $\partial \zeta / \partial t = 0$ pour t = 0, on trouve C = D = 0, $A = (dP_a \sigma) / [\rho_w g(\sigma - \sigma')]$, $B = (dP_a \sigma) / [\rho_w g(\sigma + \sigma')]$, ce qui donne,

$$\zeta(t) = \frac{dP_a}{\rho_w g} \frac{\sigma}{\sigma + \sigma'} \left[\sigma \frac{\sin \Theta - \sin \Theta'}{\sigma - \sigma'} + \frac{1}{2} \left(\sin \Theta_1 - \sin \Theta_2 \right) \right].$$
(5.10)

On remarque que l'amplitude peut être forte pour σ proche de σ' (figure 5.2). En posant $\Delta = \sigma - \sigma'$, $\Theta = \Theta' - t\Delta$, et on peut faire le développement limité suivant, $\sin \Theta = \sin \Theta' (1 + O(t\Delta)^2) - \sin(t\Delta) \cos \Theta'$, valable pour $t\Delta \ll 1$. Ainsi pour $t\Delta \ll 1$, on a

$$\zeta(t) = \frac{dP_a}{\rho_w g} \frac{\sigma}{\sigma + \sigma'} \left[\sigma t \frac{\sin t\Delta}{t\Delta} \cos \Theta' + O(t^2 \sigma \Delta) + \frac{1}{2} \left(\sin \Theta_1 - \sin \Theta_2 \right) \right].$$
(5.11)

Cette solution correspond à une croissance linéaire de l'amplitude qui se prolonge tant que $t\Delta \ll 1$ (le premier terme est dominant). La bande de fréquence $\sigma - \Delta_0 < \sigma' < \sigma + \Delta_0$ pour laquelle la croissance reste importante se réduit, avec $\Delta_0 \propto 1/t$.

c. Pression aléatoire de spectre continu

Dans le cas général, la pression dP_a peut prendre n'importe quelle forme,

$$dP_a = \int d\widehat{P}_a(\sigma'') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma''t} \mathrm{d}\sigma''$$
(5.12)

les cas précédemment étudiés correspondant à $d\hat{P}_a = \delta(\sigma'' - \sigma')$ avec δ la distribution de Dirac. Il nous faut donc intégrer sur σ'' en remplaçant σ' par σ'' dans les résultats précédents. Les modes résonants $\sigma'' = \pm \sigma$ représentent un ensemble de mesure nulle dans l'espace des σ'' , leur contribution peut donc être négligée dans le cas où le spectre est continu. On se retrouve donc avec une intégrale du type suivant, où l'égalité est valable pour toute fonction A qui est analytique,

$$\int_0^\infty A(\sigma') \frac{\sin^2 \left[(\sigma - \sigma') t \right] + O(\sigma - \sigma')}{(\sigma - \sigma')^2} d\sigma' = 2\pi t A(\sigma),$$
(5.13)

avec dans notre cas $A(\sigma') = \sigma^4 \left| d\hat{P}_a \right|^2 / [d\sigma'(\rho_w g(\sigma + \sigma'))^2]$, ce qui donne in fine,

$$E(\mathbf{k}) = \sigma^2 t \frac{\pi}{2} \frac{\Pi(\mathbf{k}, \sigma_k)}{(\rho_w g)^2},\tag{5.14}$$

avec $\Pi(\mathbf{k}, \sigma_k)$ le spectre tridimensionnel de la pression atmosphérique à la surface, où $\sigma = \sqrt{gk} \tanh(kD)$. Ainsi, parmi l'infinité des modes d'oscillations forcés par la pression atmophérique, les

seuls capable d'extraire une quantité singificative d'énergie du vent sont les modes propres que sont les ondes libres déterminées au chapitre I.



FIG. 5.2 – Croissance des vagues sous l'effet d'un vent turbulent Elévation normalisée de la surface, pour un vent $U = 5 \text{ m s}^{-1}$, et trois longueurs d'onde différentes pour les perturbations turbulentes ($L = 2\pi/k$) en profondeur infinie. En suivant l'hypothèse de Phillips, la pulsation de la pression est $\sigma' = kU$. Dans ce cas la longueur d'onde résonante est L = 16,03 m, telle que $\sigma = \sigma'$ soit $k = g/U^2$.

d. Pression induite par les vagues

Un autre cas intéressant en pratique est le cas ou les vagues modifient la pression à la surface. Dans ce cas, on peut écrire, $p_a(t) = \rho_w g \mathcal{R} \left[(\alpha + i\beta) dZ(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]$, avec α qui représente la partie en quadrature. On négligera ici α par souci de simplicité (ce terme ne contribue pas à la croissance des vagues), cette situation correspond donc à $dPa = \rho_w g\beta dZ$, et on peut alors écrire (5.3) sous la forme,

$$\frac{\partial^2 dZ}{\partial t^2} + \sigma^2 \left(1 + \mathbf{i}\beta\right) Z = 0.$$
(5.15)

Pour $\beta \ll 1$, la solution peut s'écrire, au premier ordre en β ,

$$\zeta = a(t)\cos\theta_1, \tag{5.16}$$

$$\phi = \frac{ga(t)}{\sigma} F_{CC} \sin \theta_1 + \beta g \frac{a}{2\sigma} F_{CC} \cos \theta_1, \qquad (5.17)$$

$$p = -\rho_w g z + \rho_w g a(t) F_{CC} \cos \psi - g \beta a F_{CC} \sin \theta_1, \qquad (5.18)$$

$$\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta\sigma a(t)}{2},\tag{5.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a^2(t)}{2} = \beta\sigma\frac{a^2(t)}{2} \tag{5.20}$$

avec $F_{CC} = \cosh(kz + kH)/\cosh(kD)$, et $\Theta_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t$. En absence d'autres phénomènes, ce type de pression aboutit donc à une croissance (ou atténuation) exponentielle de l'énergie des vagues, en fonction du signe de β . On peut, (en exercice), calculer le flux Eulérien de quantité de mouvement $\langle uw \rangle$, et le comparer au profil vertical de dérive de Stokes.

2. Théorie de Phillips : de la tubulence du vent à l'énergie des vagues

En supposant que la turbulence du vent est advectée sans modification par un vent moyen U (uniforme sur la verticale et dans la direction de l'axe des x pour simplifier), P_a est de la forme $P_a(x - Ut)$ (c'est l'hypothèse de G. I. Taylor, la turbulence est "gelée"). Cela correspond à $\sigma'' = \mathbf{k} \cdot U$. Pour une pression atmosphérique dont le spectre turbulent est continu,

$$P_a = \sum_{k_a} \prod_{k_a} \cos\left[k_a \left(x - Ut\right) + \alpha_{k_a}\right],\tag{5.21}$$

 ζ est donné par la superposition de solutions de la forme de (??) déphasées de α_{k_a} . Cette solution est dominée par les composantes qui sont proches de la résonance. L'énergie de chaque composante croît initialement comme t^2 , mais la largeur de la bande de fréquence pour laquelle cette croissance a lieu diminue en 1/t. Le calcul montre que l'énergie des vagues augmente linéairement avec t (eq. 5.14).

On peut alors ajouter des variations suivant y de la fluctuation de pression P_a . Dans ce cas des modes propres de la surface sont excités avec des nombres d'onde k_y non-nuls : ces vagues se propagent dans une direction différente de la direction du vent, donné par la condition de résonance

$$\sigma/k_x = U,\tag{5.22}$$

qui exprime l'égalité de la composante σ/k_x , suivant l'axe des x, de la vitesse de phase des vagues et de la vitesse du vent U. Phillips a aussi ajouté les effets de la tension de surface dans sa théorie, en utilisant la relation de dispersion des vagues de gravité-capillarité. Malheureusement, les valeurs mesurées du spectre des fluctuations de pression turbulente sont insuffisante pour expliquer la croissance des vagues.

3. Couplage vent-vagues

Si la croissance linéaire de l'énergie des vagues donnée par la théorie de Phillips (1957) peut expliquer le début de la croissance des vagues, au bout d'un certain temps on ne peut plus supposer que le vent est uniforme car il est modifié par la présence des vagues, au moins au voisinage de la surface. Miles (1957) a mis en evidence un mécanisme de croissance des vagues qui découle de cette modification. Cette théorie a été étendue par la suite par Fabrikant (1976) et appliquée par Janssen (1991). La théorie apparaît bien vérifiée, au moins qualitativement, pour les vagues telles que $C > U_{10}/3$. Pour les vagues plus lentes, il est probable que l'effet d'abri proposé par Jeffreys, en particulier en cas de décollement de l'écoulement d'air, soit important (Giovanangeli et coll. 1999). Belcher et Hunt (1993) ont montré qu'un effet comparable peut aussi se produire en absence de décollement, sous l'effet des variations des propriétés turbulentes.

Dans tous les cas le couplage vent-vagues fait intervenir une modification induite par les vagues de la pression et/ou de la tension de cisaillement dans l'air, de la forme $dPa = \rho_w g\beta dZ$. (voir eq. 5.15).

a. Equation de Orr-Sommerfeld ou de Rayleigh

La vorticité inhérente au cisaillement vertical du vent oblige à généraliser l'équation de Laplace. Le même problème se pose dans l'étude des ondes internes, avec des applications très importantes en météorologie pour le paramétrage du ralentissement des vents au dessus du relief. En considérant d'abord le cas ou le vent et les vagues sont dans la même direction, on utilise la propriété de divergence nulle pour définir une fonction de courant ψ pour la vitesse induite par les vagues, telle que $u = -\partial \psi/\partial z$ et $w = \partial \psi/\partial x$. En suivant Miles (1957) on se fixe le profil de vitesse U(z) du vent moyen, uniforme en x, et on note ses dérivées premières et secondes U' et U''. En supposant que $|u, w| \ll U$, on peut négliger les termes quadratiques en u et w, y compris les tenseurs de Reynolds, et on a l'équation du mouvement,

$$\rho_a \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + wU' \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
(5.23)

$$\rho_a \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$
(5.24)

(5.25)

La gravité n'apparait pas : il suffit de redéfinir la pression comme la pression moins la pression hydrostatique.

En utilisant la fonction de courant et en cherchant une solution qui se propage à la vitesse C comme l'élévation de la surface $\zeta = a e^{ik(x-Ct)}$. On a donc $\psi = \hat{\psi} e^{ik(x-Ct)}$

$$\rho_a \left[(U-C)\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial y} - U'\widehat{\psi} \right] = p \tag{5.26}$$

$$\rho_a k^2 \left(U - C \right) \hat{\psi} = \frac{\partial p}{\partial z}.$$
(5.27)

(5.28)

Classiquement on élimine la pression et on trouve l'équation de Rayleigh, aussi appelée équation de Orr-Sommerfeld,

$$\widehat{\psi}'' - k^2 \widehat{\psi} - \frac{U''}{U - C} \widehat{\psi} = 0 \tag{5.29}$$

L'équation de Rayleigh décrit la propagation horizontale d'une onde dans un milieu cisaillé verticalement. Elle sera ainsi utilisée pour étudier l'effet d'un courant variant sur la verticale, et elle est aussi appliquée pour les ondes internes. On remarque qu'elle diffère de l'équation de Helmholz (1.20) par son dernier terme qui présente une sigularité pour U = C. Pour un vent variant logarithmiquement $U = u_{\star}/\kappa \ln(z/z_0)$ jusqu'à atteindre U_{∞} au niveau z_{∞} , il existe, pour $C < U_{\infty}$ un niveau "critique" z_c tel que $U(z_c) = C$ où l'équation de Rayleigh est singulière.

Afin de déterminer le taux de croissance adimensionnel β , il suffit de se rendre compte que (5.26) nous donne une perturbation de pression qui peut être mise sous la forme de l'équation (??) et de reconnaître que β est donné par la partie imaginaire de (5.26).

Miles (1957) a montré que β s'obtenait par intégration verticale de $\hat{\psi}$ donné par l'équation de Rayleigh. Cette intégrale est alors dominée par la singularité au niveau critique z_c et il obtient une expression approchée, en supposant que $\hat{\psi}$ décroit comme e^{-kz} ,

$$\beta = -\pi \frac{U''(z_c)}{U'^3(z_c)} k^2 \left(\int_{z_c}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kz}}{(U-C)^2} \mathrm{d}z \right)^2.$$
(5.30)

A. GÉNÉRATION DES VAGUES PAR LE VENT



FIG. 5.3 – Ecoulement dans l'air et niveau critique : mesures de Hristov et coll. (2003). A gauche, une photo de la plateforme de recherche FLIP et un schéma de l'écoulement de l'air au dessus des vagues, dans un référentiel fixe. A droite, solutions numériques de l'équation de Orr-Sommerferld et observations des variations de l'amplitude et de la phase des vitesses pour des vagues de fréquence environ 0.7 f_p : la vitesse des composantes dont les propriétés sont mesurées est indiquée sur le spectre en bas à droite (©Nature Publishing Group).

La croissance des vagues est donc largement déterminée par la forme du profil du vent U(z) au voisinage du niveau critique z_c défini par $U(z_c) = C$. L'équation (5.30) permet de calculer le taux de croissance β si on connaît le profil du vent.

b. Interprétation de Lighthill : Force de vortex

Si le mécanisme de départ est assez clair (les fluctuations de pression en surface), les calculs aboutissant à une valeur de β obscurcissent un peu comment cette corrélation pression-pente des vagues apparaît. Lighthill (1962) a proposé une inteprétation relativement simple du résultat de Miles (1957). Le vent a un profil vertical de vitesse U(z) tel qu'à la surface, il est égal à la vitesse oscillante des vagues. En négligeant la diffusion (turbulente ou visqueuse), la vorticité de l'écoulement bidimensionnel,

$$\Sigma = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\tag{5.31}$$

est conservée par toute particule. On peut écrire l'accélération dans les équations d'Euler come la somme d'un gradient de pression totale

$$p_{\rm tot} = p + \frac{1}{2}\rho \left(U^2 + w^2\right) \tag{5.32}$$

et d'une force de vortex $(-\rho \Sigma w, \rho \Sigma U)$:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\rho \Sigma w - \frac{\partial p_{\text{tot}}}{\partial x}$$
(5.33)

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \rho \Sigma u - \frac{\partial p_{\text{tot}}}{\partial z}$$
(5.34)

En moyenne sur une longueur d'onde (notée $\langle \cdot \rangle$), (5.33) donne

$$\rho \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = -\rho \left\langle \Sigma w \right\rangle. \tag{5.35}$$

La vorticité Σ est simplement égale à U'(z) pour un écoulement non-perturbé par les vagues, et sa valeur diminue avec z si l'on suppose, avec Miles (1957), U''(z) < 0. En présence de vagues qui perturbent l'écoulement par un déplacement des lignes de courant, les variations de Σ sont donc essentiellement dues à une variation de l'altitude des particules. Si on fait un développement en série de Σ autour de z_0 , avec $h = z - z_0$ on a

$$\Sigma = U'(z_0) + hU''(z_0) + O(h^2)$$
(5.36)

et donc

$$\rho \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = -\rho U''(z_0) \langle hw \rangle.$$
(5.37)

Puisque la circulation de l'air résultant de la présence des vagues est advectée avec la vitesse de phase C, l'air à tous les niveaux, excepté le niveau "critique" $z = z_c$ où U = C, est déplacé de manière à peu près sinusoïdale avec une fréquence

$$\frac{U\left(z\right)-C}{L},\tag{5.38}$$

où L est la longueur d'onde des vagues. Pour de telles oscillations sinusoïdales, le déplacement vertical h et la vitesse verticale w sont en quadrature et la moyenne de leur produit est nul. Pour des vents plus rapides (en altitude, où l'on peut négliger l'effet des vagues) que la vitesse de phase C des vagues il existe donc un niveau "critique" z_c où $U(z_c) = C$. Juste au dessus de $z = z_c$, une particule d'air qui se trouve à la verticale d'une crête de vague la dépasse, mais avant de se retrouver au dessus du creux de vague suivant son altitude diminue pour se trouver légèrement en dessous de $z = z_c$ car les lignes de courant sont perturbées par la présence des vagues. Du coup, la particule d'air est lentement rattrapée par la crête de vague qu'elle vient de doubler et se retrouve à sa position initiale par rapport au train de vagues. Mais à $z = z_c$ une particule d'air se déplace à la même vitesse que les vagues, si bien qu'une particule qui monte continue de monter et inversement et $\langle hw \rangle$ est non-nul. w est de la forme

$$w = w_0(z) \cos\left(2\pi \frac{U(z) - C}{L}t\right),\tag{5.39}$$

h est donc

$$h = \frac{w_0(z)L}{2\pi \left[U(z) - C\right]} \sin\left(2\pi \frac{U(z) - C}{L}t\right),$$
(5.40)

et (5.37) devient

$$\rho \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = \frac{\pi}{4} \rho L U''(z_c) w_0^2(z_c) \delta(z - z_c), \qquad (5.41)$$

où on a utilisé

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} = \pi \delta(\sigma) \,. \tag{5.42}$$

Pour $U''(z_c) < 0$, la quantité de mouvement est perdue par l'air, au profit des vagues, et correspond à un gain d'énergie S_{in} ("in" pour "wind INput") égal à C fois cette perte :

$$S_{\rm in} = \frac{\pi}{4} \rho C L U''(z_c) w_0^2(z_c), \qquad (5.43)$$

ce qui est une autre manière d'écrire (5.30). Il ne reste plus qu'á déterminer w_0 qui est la perturbation de la vitesse verticale dans l'air, induite par les vagues. Lighthill obtient la valeur de w_0 en calculant d'abord la pression, qui est en équilibre avec la force centrifuge $\rho_a |u, w|^2 / R$. Le rayon de courbure des lignes de courant, R, estimé en supposant que ces lignes de courant suivent la surface à la surface et deviennent progressivement horizontale au fur et à mesure qu'on s'élève ($R \propto e^{-kz}$). Ensuite il exprime l'équilibre entre le gradient de pression et la force de vortex qui fait intervenir w et obtient une expression pour w_0 . On trouve que $w_0(z_c)$ est proportionnel à l'amplitude a des vagues. Le terme de source est donc proportionnel à l'énergie des vagues, et la croissance des vagues est exponentielle.

4. Effet d'abri sans décollement

Hristov et coll. (2003) montrent clairement que la perturbation induite par les vagues a une structure très proche de la théorie du niveau critique (figure 5.3). De plus, l'extension de la théorie de



FIG. 5.4 – Taux de croissance des vagues sous l'effet du vent, observations et théorie . a. trait plein : théorie de Miles étendue par Janssen, pointillé : observations de Snyder et coll. (1981), symboles : observations compilées par Plant (1982) (tiré de Janssen et coll. 1994). (b) Taux de croissance des vagues pour $kz_0 = 10^{-4}$ (triangles pleins) comparé aux modèle de numérique de Mastenbroek (1996) (cercles reliés) et aux données collectées par Plant (1982, autres symboles) (tiré de Belcher 1999).

Miles (1957) par Janssen (1991) semble donner un bon accord avec les mesures de variation de pression au dessus des vagues par Snyder et al. (1981, figure 5.4). Cependant ces observations ne couvrent que les vagues proche du pic spectral. A haute fréquence le niveau critique est très près de la surface, dans une région ou la turbulence est importante et la vitesse moyenne du vent U est du même ordre que les fluctuations induites par les vagues ou la turbulence.

Afin de représenter l'écoulement sur des vagues lentes, Belcher et Hunt (1993) ont étudié la turbulence près de la surface et sa déformation par les vagues. Leur théorie fait en particulier intervenir un raccordement entre une couche interne, et une couche externe. Dans la couche interne proche de la surface, la turbulence peut être modélisée avec un modèle de type k-l et une longueur de mélange augmentant linéairement avec l'altitude au dessus de la surface $(l = \kappa u_{\star}\xi_3)$, comme en écoulement permanent : on a un comportement de type visqueux. Dans la couche externe la turbulence est composée de grands tourbillons, rapidement déformé par les vagues, sans que les tourbillons ait le temps de transporter de la quantité de mouvement à l'échelle de la période des vagues : on a un comportement élastique (Miles 1996). La séparation entre ces deux couches se fait au niveau ou le temps caractéristique des tourbillons ("eddy turn-over time" en anglais) est égal au temps d'advection par le vent sur une longueur d'onde (voir Janssen 2004 pour une correction de la théorie de Belcher et Hunt 1993). Belcher et Hunt on montré que l'intensification de la turbulence du côté des crêtes de vagues abrité par le vent induit un gradient du tenseur de Reynolds qui est équilibré par une variation de la pression. En même temps les lignes de courant s'écartent un peu plus de la surface du côté abrité. Cette variation de pression est partiellement en phase avec la pente des vagues et donc contribue à la croissance des vagues et à la tension de vent. Le même mécanisme explique très bien la traînée observée pour un vent au dessus de collines. Il s'agit en quelque sorte du même mécanisme que Jeffreys (1925) avait proposé, sans avoir besoin d'un décollement de l'écoulement d'air derrière la crête.

La théorie de Belcher et Hunt (1993) est bien vérifiée par le modèle numérique de Mastenbroek (1996, voir aussi Mastenbroek et al. 1996). Le modèle de Mastenbroek utilise une cloture turbulente au second ordre et donc ne fait pas l'hypothèse d'une viscosité turbulente. Il met clairement en évidence le fait qu'une viscosité turbulente n'est pas adapté à la couche externe.

Des décollements sont toutefois observés, en particulier lorsque les vagues déferlement, ce qui augmente d'autant leur croissance, et la traînée. Ces effet, ainsi que les modulations de la tension de vent sont probablement à l'origine de la sous estimation du taux de croissance pour les vagues jeunes (C/u_{\star}) élevé, figure 5.4, voir Giovanageli et al. 1999). Par ailleurs, pour des vagues très jeunes, le décolement peut littéralement déconnecter l'écoulement d'air du profil des vagues : le point de rattachement de l'air sur la vague étant près de la crête suivante. Ce phénomène est probablement à l'origine de la réduction de la rugosité de l'océan, et du coefficient de traînée, pour les vents très forts (Powell et coll. 2003, Donelan et coll. 2006).

5. Effet de la modulation de la tension de vent

Il a été reconnu depuis Longuet-Higgins (1969) qu'une tension de vent variable pouvait engendrer un transfert d'énergie vers les vagues. La théorie la plus simple à ce sujet est la théorie visqueuse en absence de vent moyen, élaborée par Dore (1978), reprise par Weber et Førland (1990). Le raccord de vitesse entre l'air et l'eau donne lieu à un très fort cisaillement dans une couche limite du côté supérieur de l'interface air-eau, dont l'épaisseur est $\delta_a = (2\nu_a/\omega)^{1/2}$ avec $nu_a v \simeq 1.4 \times 10^{-5}$ m² s⁻¹, soit $\delta_a \sim 1$ cm. La solution de ce raccord donne le taux de dissipatation suivant,

$$\frac{\partial}{\partial t}E(f,\theta) = -2\frac{\rho_a}{\rho_w}k\left(2\sigma\nu_a\right)^{1/2}.$$
(5.44)

Ce terme est significatif pour les plus grandes périodes (figure 5.5).

En réalité l'écoulement est probablement turbulent, en effet, une couche limite du même type se trouve sur le fond et est turbulente pour des nombre de Reynolds $U\delta_w/nu_w$ de l'ordre de 15, avec une transition variable en fonction de la rugosité. Il convient donc d'étendre la théorie de Dore au cas d'une couche limite turbulente. On peut raisonnablement supposer que la dissipation est plus importante dans le cas turbulent, ce qui permettrait d'expliquer les atténuation observées pour la houle.

Une difficulté importante das ces études est la détermination de la rugosité pour le mouvement oscillant, et l'effet du vent moyen pour ce mouvement oscillant. En effet, la tension du vent est essentiellement due à la croissance de vagues de longueur d'onde métrique, de telle sorte que si la tension de vent est modulée, cela dépend essentiellement de la modulation de ces vagues métriques par des vagues plus longues. La résolution de cette question nécessite donc une théorie (et si possible des mesures, qui font grandement défaut) pour la modulation des vagues métriques par des vagues plus longues. Les fondations de la théorie ont été posées par Hasselmann (1971, qui sera abordée au chapitre VII. Il est probable que ces effets contribuent plutôt à une dissipation des vagues de grandes périodes (plus rapides que le vent. Kudryavtsev et Makin 2004) ont chosi de linéariser la modulation de la tension de vent, en supposant que le cisaillement du vent moyen domine le cisaillement de la couche limite oscillante, et leur théorie aboutit a des taux d'atténuation de la houle bien trop élévés. Il s'agit là de sujets de recherche très ouverts.

6. Paramétrage de S_{in}

En pratique la formule donnée par Miles (1957) n'est pas utilisée telle quelle, en particulier parce qu'elle néglige les effets de la turbulence (mis à part le cisaillement vertical). Les modèles numériques utilisent des formules du type

$$S_{\rm in}\left(f,\theta\right) = \sigma\beta E\left(f,\theta\right) \tag{5.45}$$

où le taux de croissance β dépend de la direction du vent $(\theta_{\star} - \theta)$ par rapport à la direction θ des vagues, et est ajusté empiriquement pour reproduire des observations, très difficiles à réaliser in-situ, ou des simulations numériques du couplage vent-vagues.

Pour le modèle WAM (Cycle 3), $S_{\rm in}$ est ajusté aux mesures de Snyder et coll. (1981), avec

$$\beta = \max\left\{0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_w} \left[28 \frac{U_\star}{c} \cos\left(\theta_\star - \theta\right) - 1\right]\right\}.$$
(5.46)

où ρ_a et ρ_w sont les masses volumiques de l'eau et de l'air, et $U_{\star} = \langle u'w' \rangle^{1/2}$ est la vitesse de frottement. Ces mesures effectuées dans la baie d'Abaco (Bahamas) ont été confirmées par d'autres mesures en mer du Nord (Hasselmann et Bösenberg 1991). Malheureusement elles ne couvrent que des vents et des hauteurs de vagues assez faibles, et surtout, ne sont valables que pour les vagues autour du pic spectral. Par ailleurs on dispose plus souvent de mesures du vent à une altitude fixe, par exemple 10 mètres, que de U_{\star} . En supposant que le flux turbulent de quantité de mouvement $\langle u'w' \rangle$ est constant sur la verticale



FIG. 5.5 – Atténuation de la houle : comparaison des effets de la modulation du vent, de la viscosité et de la turbulence en fonction de la période des vagues pour un vent de 10 m s⁻¹. (a) principe de la modulation du vent : la vitesse orbitale dans l'air est opposée à la vitesse orbitale dans l'eau, ce qui module la tension de vent. (b) Le "half decay distance" correspond à la distance de propagation sur laquelle les vagues ont perdu la moitié de leur énergie. Pour le calcul de l'effet de la turbulence, β_{turb} , les vagues sont supposées se propager dans le sens du vent. Les valeurs pour les

paramétrages WAM4 et TC correspondent au terme de dissipation (WAM4 : Komen et al. 1994) et à la somme de la dissipation et de l'atténuation par le vent (TC : Tolman et Chalikov 1996), obtenus après intégration du modèle en configuration uniforme, avec un vent constant.

et que la viscosité turbulente ν_T est de la forme $l^2 \partial U/\partial z$ avec la longueur de mélange $l = \kappa z$ ($\kappa = 0.41$ est la constante de von Kármán), le profil de vitesse est logarithmique

$$U(z) = \frac{U_{\star}}{\kappa} \ln\left(z/z_0\right), \qquad (5.47)$$

s'annulant à z_0 , et on utilise une relation du type de celle proposée par Charnock (1955), qui paramétrise la rugosité des vagues de gravité-capillarité qui sont directement forcées par le vent

$$z_0 \simeq \alpha U_\star^2 / g, \tag{5.48}$$

avec $\alpha = 0.0114$ (Charnock, 1955). De nombreuses améliorations ont été proposées (voir Komen et coll.,1994), en particulier la prise en compte de la stabilité de la couche limite atmosphérique et la théorie "quasi-linéaire" de Janssen (1991) qui introduit une modification du profil de vent induit par le transfert de quantité de mouvement vers les vagues, ce qui a pour effet une modification du paramètre de Charnock α en fonction de l'état de la mer. Ces résultats ont des effets contestés dans les modèles opérationnels de prévision des vagues, mais ils sont importants pour les flux de quantité de mouvement à la surface, pour les modèles de circulation générale météorologiques ou océaniques.

Pour la partie haute fréquence du spectre (typiquement $f > 3f_p$) on ne dispose pas de mesures directes du travail exercé par les forces de pression. Des observations de la croissance des vagues (Plant 1982) ainsi que des simulations numériques de l'écoulement de l'air au dessus de la surface laissent penser que S_{in} est proportionel à $u_{\star}^2 \cos^2(\theta_{\star} - \theta)$. Par ailleurs, au fur et à mesure qu'on s'approche de la surface, une part de plus en plus importante du flux de quantité de mouvement (la tension de vent) est constituée par le flux induit par les vagues. Une des conséquences de cette répartition entre flux turbulent et flux induit par les vagues est que, pour les vagues les plus courtes, la tension de cisaillement qu'elles subissent est plus faible que pour les vagues plus longues (Hara et Belcher 2002).

Enfin, pour les vagues se propageant contre le vent relatif, l'atténuation, quand elle est prise en compte, est pour l'instant paramétrée à partir de modèles numériques (Chalikov et Belevich 1993, Tolman et Chalikov 1996) avec une forte correction empirique sur la base des observations de hauteurs de vagues dans le Pacifique (Tolman 2002). Cet aspect devrait bientôt changer grâce à l'observation par SAR de l'atténuation de la houle sur de grandes distances (Ardhuin, Collard et Chapron, travail en cours).

B. Evolution faiblement non-linéaire des vagues

Les premiers modèles de prévision des vagues dans les années 1950 et 1960 utilisaient les théories de Phillips et Miles pour la croissance des vagues et le concept de saturation universelle proposé par Phillips (Pierson et Moskowitz, 1964) : l'énergie des vagues pour une fréquence donnée était limitée par un niveau de saturation. Il s'est avéré que la croissance des vagues était largement controlée par les interactions non-linéaires entre les vagues et que la "saturation" du spectre était en fait un subtil équilibre entre déferlement, évolution non-linéaire et génération (Phillips 1985). Ces effets non-linéaires, déjà suspectés au début des années soixante, ont été déterminés quantitativement pour un spectre de vagues aléatoires par Klaus Hasselmann (1962) et Vladimir Zakharov (1968). Il est frappant que ces deux théories soient apparues indépendamment dans des formalismes différents (la mécanique 'classique' pour les premières publications de Hasselmann et la mécanique Lagrangienne pour Zakharov), ont été conçues au même moment (malgré une publication décalée), et par ces specialistes des particules et de la physique des plasmas ou de la relativité générale qui ont fait intrusion dans le monde des océanographes à la faveur du grand bouillonnement d'idées des années 1950 et 1960. Toutefois les relations entre ces deux théories, dont certains résultats sont équivalents, est encore en cours de clarification (Elfouhaily et coll., 2000) et leur confirmation, vient à peine de commencer (Tanaka, 2001).

Les premiers paramétrages de ces effets non-linéaires ont donné les modèles dits de "seconde génération" qui sont encore largement utilisés, et un calcul plus réaliste est au coeur des modèles de "troisième génération", dont WAM (Groupe WAMDI, 1988).

1. Interactions vague-vague

On peut continuer le développement en série (2.1) pour déterminer ζ_3 et ϕ_3 . Phillips (1960) a montré qu'il existe des résonances $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ et $\sigma(k_4) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3$. Dans ce cas, la

présence d'un triplet résonnant de trains d'ondes monochromatiques produit un quatrième train d'onde dont l'amplitude croît dans le temps et qui est une onde "libre", satisfaisant à la relation de dispersion linéaire. Ce phénomène a été vérifié par McGoldrick et coll. (1966) dans un bassin à houle, dans le cas particulier $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. En pratique, pour un spectre continu de vagues, toutes les composantes ont une amplitude non-nulle qui varie lentement dans le temps et dans l'espace. Cette résonance est alors une interaction entre quatre trains d'ondes, et le taux de croissance de l'énergie pour chaque train d'onde est donnée par Hasselmann (1962) sous la forme

$$\frac{\partial E\left(\mathbf{k}\right)}{\partial t} = S_{\mathrm{nl}}\left(\mathbf{k}\right)$$

$$= \int \left|T\left(\mathbf{k}_{1}, \mathbf{k}_{2}, \mathbf{k}_{3}, \mathbf{k}\right)\right|^{2} \delta\left(\mathbf{k}_{1} + \mathbf{k}_{2} - \mathbf{k}_{3} - \mathbf{k}_{4}\right) \delta\left(\sigma_{1} + \sigma_{2} - \sigma_{3} - \sigma_{4}\right) \qquad (5.49)$$

$$\times \left[E\left(\mathbf{k}_{1}\right) E\left(\mathbf{k}_{2}\right) \left(E\left(\mathbf{k}_{3}\right) + E\left(\mathbf{k}_{4}\right)\right) - E\left(\mathbf{k}_{3}\right) E\left(\mathbf{k}_{4}\right) \left(E\left(\mathbf{k}_{1}\right) + E\left(\mathbf{k}_{2}\right)\right)\right] \mathrm{d}\mathbf{k}_{1} \mathrm{d}\mathbf{k}_{2} \mathrm{d}\mathbf{k}_{3},$$

où T est donné par Herterich et Hasselmann (1980).

Le calcul de S_{nl} suppose que l'élévation de la surface est Gaussienne, qui permet de négliger les corrélations entre 4 trains de vagues de nombres d'ondes différents qui interviennent dans le calcul de l'énergie d'ordre 6 dont est issu l'expression de S_{nl} (Hasselmann, 1962). Cette hypothèse est bien vérifiée en pratique car les corrélations que créent les interactions de 4 vagues apparaissent bien moins vite que le temps d'évolution du spectre, de l'ordre de $\varepsilon^4 T$, dû à ces interactions. Les interactions de 4 vagues causent une double cascade d'énergie dans le spectre des vagues, vers les petites et les grandes longeurs d'onde. Cette dernière explique en partie l'allongement de la période des vagues avec le fetch (voir chapitre précédent).

Le terme de source S_{nl} est tel que l'énergie totale $E = \int E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ est conservée, ainsi que la quantité de mouvement $\mathbf{M} = \int \mathbf{k} E(\mathbf{k}) / \sigma d\mathbf{k}$, et l'action $A = \int E(\mathbf{k}) / \sigma d\mathbf{k}$. Comme on le re-verra plus loin, cette dernière conservation est intrinsèquement liée à l'invariance du problème lorsque les phases des différentes composantes sont modifiées. Cette triple conservation dans un système non-linéaire donne lieu à une turbulence d'onde avec une cascade d'énergie vers les petites échelles et une cascade de l'action vers les grandes échelles (voir Zakharov et Zaslavskii 1982, Zakharov et coll. 2004). Ainsi, en absence de forçage et avec une dissipation seulement à petite échelle, le spectre des vagues a tendance a évoluer vers une solution de type Kolmogorov auto-similaire. En particulier la conservation du flux d'énergie vers les petites échelles donne un spectre en fréquence proportionnel à f^{-4} . Toutefois, en pratique, il y a un forçage et une dissipation et aux grandes échelles.

Le calcul du terme S_{nl} est malheureusement trop coûteux, d'un facteur 10 à 100 à l'heure actuelle suivant les applications, car il s'agit d'une intégrale sur au moins 3 dimensions qui doit se calculer pour chaque composante spectrale en chaque point de l'espace. Le calcul exact ne se fait donc que pour des recherches sur les propriétés de la turbulence faible ou pour comprendre en détail l'évolution de l'état de la mer. La plupart des modèles de prévision ont adopté, faute de mieux, un approximation discrète des interactions ("DIA", Hasselmann et coll. 1985). Cette approximation utilise les propriétés de conservation (énergie, action, quantité de mouvement) des quadruplet d'ondes en interaction résonante, et de nombres d'ondes \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 , et \mathbf{k}_4 vérifiant les relations de résonance. Au lieu de garder toutes les interactions possible, le DIA ne retient qu'une configuration géométrique pour chaque composante du spectre (figure 5.6). Le DIA conserve donc les propriétés intégrales des vagues mais la forme du S_{nl} qui en résulte est quantitativement très différente de la forme théorique. Le DIA a été ajusté pour que le transfert d'énergie vers les basses fréquences soit à peu près correct lors de la croissance des vagues. Ce choix occasionne cependant des dégâts collatéraux importants sur la distribution angulaire du S_{nl} (trop large) et son rôle dans la zone d'équilibre $1.5 < f_p < f < 4f_p$.



FIG. 5.6 – Configuration des interactions dans le DIA.

Pour chaque composante du spectre **k** les interactions ne sont calculées qu'avec le quadruplet déterminé par $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, $k_3 = (1 + \lambda)^2 k$ et $\sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \sigma$, ce qui impose $k_4 = (1 - \lambda)^2 k$. Dans le DIA standard, $\lambda = 0.25$ et $\gamma = \sqrt{2}$ ont été choisi. Pour d'autres valeurs de λ le nombre d'onde \mathbf{k}_3 se déplace sur les autres courbes, car il est contraint par la relation de résonance, tandis que \mathbf{k}_4 est donné par $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$. Figure tirée de van Vledder (2006).
C. "Dissipation" d'énergie

De nombreux mécanismes contribuent à la dissipation de l'énergie des vagues, ou plutôt au transfert d'énergie mécanique vers d'autres formes de mouvement, en particulier la turbulence. En effet la seule dissipation en chaleur est due à la viscosité.

1. Effet de la viscosité dans l'eau

Nous l'avions négligée jusque là, il est temps de savoir pourquoi. La conversion d'énergie mécanique en chaleur par unité de surface océanique est donnée par le travail des contraintes visqueuses sur les vitesses orbitales soit, d'après tout bon cours de mécanique des milieux continus,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ +\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dz$$
(5.50)

On remarque que cette expression ne fait intervenir que des carrés de différents termes. Grâce au théorème de Parseval on peut donc disséquer cette dissipation en un terme pour chaque composante du spectre. Avec un peu de calcul on arrive à la formule donnée par Lamb (1932), valable pour des vagues de gravité au second ordre en pente des vagues, et quelle que soit la profondeur,

$$\frac{\partial}{\partial t}E\left(f,\theta\right) = -4\nu_{w}k^{2}E\left(f,\theta\right)$$
(5.51)

avec ν_w la viscosité cinématique de l'eau (environ $3 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 20°C, et beaucoup plus pour des eaux très froides). En pratique cette dissipation est très faible pour les vagues (figure 5.5). Elle n'est importante que pour les vagues les plus courtes et dans ce cas il faut aussi prendre en compte la tension de surface.

2. Effets de la turbulence dans l'eau

La turbulence, des plus petites aux plus grandes échelles peut avoir divers effets sur les vagues (Phillips 1961). En particulier les tourbillons et les variations de courant à petite échelle peuvent partiellement réflechir les vagues (Rayevskiy 1983), tandis que les variations à des échelles plus grandes que la longueur d'onde entraînent une réfraction des vagues (chapitre VII). Dans tous les cas le transfert d'énergie entre les vagues et la turbulence peut se calculer en considérant l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente (ECT, ou TKE en anglais, voir par exemple Phillips 1977). Le taux local de production d'ECT par le mouvement des vagues est,

$$P_{ws} = \rho \sum_{i,j} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\tag{5.52}$$

qui s'exprime en Watts par mètre cube dans le système international. u_i est la composante *i* de la vitesse induite par les vagues, et $\overline{u'_i u'_j}$ est le tenseur des flux turbulents ou tenseur de Reynolds. En supposant que ces flux turbulents sont constants par rapport à la phase des vagues, ce qui peut être une première approximation, Ardhuin et Jenkins (2006) ont montré que P_{ws} se simplifie. En supposant de plus que le flux $\rho(\overline{u'w'}, \overline{v'w'})$ est uniforme et égal (dans l'eau) à la tension de vent $\tau_a = \rho_a u_{\star}^2$, on a

$$P_{ws} = \tau_a \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial z},\tag{5.53}$$

avec \mathbf{U}_s la dérive de Stokes. On peut aussi exprimer cette production comme un terme de source pour l'énergie des vagues,

$$\frac{\partial}{\partial t}E\left(f,\theta\right) = S_{\text{turb}} = -\frac{\rho_a}{\rho_w} u_\star^2 \sigma k \cos\left(\theta_\star - \theta\right) \frac{\cosh(2kD)}{\sinh^2(kD)} E\left(f,\theta\right) \tag{5.54}$$

qui devient

$$S_{\text{turb}} = -2\frac{\rho_a}{\rho_w} u_\star^2 \sigma k \cos\left(\theta_\star - \theta\right) E\left(f, \theta\right)$$
(5.55)

en eau profonde. Teixeira et Belcher (2002) étaient déjà arrivés à la même expression en faisant l'hypothèse d'une distortion rapide de la turbulence par le mouvement des vagues. Cette hypothèse est très proche de notre hypothèse de non-corrélation de la turbulence avec la phase des vagues. En pratique cette expression donne probablement un ordre de grandeur raisonnable pour l'interaction des vagues avec la turbulence dans la couche de mélange océanique. Elle donne une expression pour la source d'energie des pricipaux mouvements turbulents que sont, dans ce cas, les circulations de Langmuir (chapitre VII) dont le mouvement est effectivement assez lent pour considérer qu'il s'agit d'une distortion rapide par les vagues. Par ailleurs cette expression indique que les vagues gagnent de l'énergie lorsqu'elles se propagent contre le vent. Il reste à voir si dans ce cas l'hypothèse de non-corrélation est toujours valables. Comme l'indique la figure (5.5) le terme de source (5.55) pourrait constituer une part importante de la dissipation de la houle.

3. Déferlement

a. Critère de déferlement

Le déferiement est le puits d'énergie le plus important pour la houle et la mer du vent. Pour des vagues régulières, le déferiement résulte d'une instabilité qui se développe à partir de la crête des vagues dès que la vitesse des particules dépasse la vitesse de phase de l'onde. On trouve alors que la cambrure maximale d'une vague régulière est à peu près $H/L = 0.14 \tanh(kD)$ (Miche 1944). Il est probable qu'un critère similaire sur la vitesse s'applique aux vagues irrégulières, en effet, une crête qui se déplace plus vite que la vitesse de phase conduit, si cet excès de vitesse dure assez longtemps, à l'écroulement de la crête sur la face avant. Les observations de Melville et Rapp (1988) montrent que des vagues déferlantes non stationnaires ont effectivement des vitesses qui peuvent s'approcher de la vitesse de phase, mais le début du déferlement n'a pas été isolé dans ces observations. En tout état de cause, ces fortes vitesses peuvent augmenter considérablement la dérive en surface.

Par ailleurs, de nombreux auteurs ont cherché un critère de déferlement sur l'accélération des particules, mais ce paramètre n'est pas un bon indicateur du déferlement (e.g. Holthuijsen et Herbers 1986).

b. Types de déferlements

La forme des déferlements est très différente suivant les échelles des vagues concernées. Pour les petites longueurs d'ondes (0.1 < L < 1 m, soit $\sigma/(2\pi) < 1.25$ Hz) le déferlement est en général trop faible pour entraîner la formation de bulles d'air dans l'eau, car toute augmentation de la surface air-eau demande une énérgie égale à la tension de surface T que multiplie l'excès de surface. On a alors des micro-déferlements (Banner et Phillips 1974) qui sont carctérisés par une forte courbure de la surface et la génération d'ondes capillaires sur la face avant de la vague. Ces ondes capillaires sont fortement dissipées par la viscosité et absorbent une partie importante des vagues courtes. Les observations montrent que ces déferlements sont très fréquents, sauf par vent faible, passant de 11% à 80% pour des vents de 4.5 et 7.4m s⁻¹ dans les expériences de Siddiqui et Loewen (2007). Ces microdéferlements jouent un rôle important dans les flux de gaz et de chaleur à la surface car ils perturbent la couche limite visqueuse (figure 5.7.a).

Pour des ondes plus longues, le déferlement est généralement associé à la formation de bulles, associée à un bruit caractéristique. Ce 'bruit ambiant' est d'ailleurs un facteur important dans les performances des sonars (e.g. Lu et coll. 1990, Ma et coll. 2005). On distingue alors plusieurs types de déferlement. Lorsqu'il est quasi-stationnaire avec une forme constante de la vague et du nuage de bulle on a un déferlement déversant (spilling). Pour des déferlements plus intenses on observe la formation d'un tube d'air sous la crête, on parle alors de déferlement plongeant (figure 5.7.c). Cet injection de bulle peut consommer près de la moitié de l'énergie perdue par les vagues (Lamarre et Melville 1991).

Enfin, il convient de souligner que les vagues plus longues peuvent contribuer au déferlement des vagues plus courtes, soit par leur propre déferlement, soit par les modulations hydrodynamiques et aérodynamiques qu'elles induisent.





(a) Schéma d'un micro-déferlement vu de côté, la couche limite n'est pas à l'échelle (tiré de Siddiqui et Loewen 2007, ©Cambridge University Press), (b) déferlement d'une onde courte avec entrainement d'air (tiré de Koga 1982), (c) évolution d'une vague au cours d'un déferlement plongeant, avec un profil toutes les 0.04 s (tiré de Bonmarin 1989, ©Cambridge University Press).

c. Statistiques du déferlement

De nombreuses applications, dont l'acoustique sous-marine, la télédétection, l'étude des flux air-mer, demande une connaissance statistique des caractéristiques du déferlement. Cette caractérisation a été longtemps limitée à une couverture d'écume, dans laquelle plusieurs types d'écume (active, fossile ...) étaient distinguées (e.g. Monahan et Woolf 1989). Cette couverture d'écume varie fortement avec la vitesse du vent, passant de valeurs très faibles pour $U_{10} < 7 \text{ m s}^{-1}$, pour atteindre 1 % à $U_{10} \simeq 10 \text{ m s}^{-1}$ et 6 % à $U_{10} \simeq 20 \text{ m s}^{-1}$, et bien plus dans des vents plus forts. De fait cette variabilité est à la base de l'échelle Beaufort pour déterminer la force du vent à partir de l'aspect visuel de la mer. Or le déferlement peut aussi se produire en l'absence de vent, du fait de la convergence des vagues liée à la topographie ou aux courants (voir chapitres suivants). Ainsi on distingue souvent le déferlement se produisant dans la 'zone de déferlement' devant les plages car presque toutes les vagues y déferlent du fait de la rapide convergence du flux d'énergie associée au levage. Par ailleurs la couverture seule est insuffisante pour caractériser le déferlement.

Phillips (1985), a donc proposé un description 'spectrale' du déferlement en introduisant la fonction Λ , qui est la densité de longueur de crête déferlante par unité de surface dans l'espace des vitesses **c** des fronts déferlants. Ainsi, la longueur $\Lambda(\mathbf{c})dc_xdc_y$ est la longueur totale des fronts déferlants qui ont un vecteur vitesse égal à $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ à dc_x et dc_y près. Il convient de préciser que c est généralement légèrement inférieur à la vitesse de phase C des vagues qui supportent ces fronts. L'intérêt d'une telle décomposition est que nombre de propriétés des déferlements sont fonction de la vitesse c. En particulier Duncan (1981, 1983) a montré que la dissipation d'énergie et la perte de quantité de mouvement de vagues stationnaires en laboratoire était proportionnelles à c^5 et c^4 fois la longueur du front déferlant. Par ailleurs, la fraction de la surface océanique balayée par les déferlements par unité de temps est simplement $\int c\Lambda dc_x dc_y$. On peut aussi supposer les déferlement auto-similaires pour calculer l'épaisseur de l'écume par exemple (Reul et Chapron 2003).

L'étude du déferlement s'oriente donc vers la mesure et la prévision de la fonction Λ . Ce type d'observation n'est pas aisé et demande un suivi vidéo à haute résolution dans les domaines optique ou infrarouge (figure 5.8). En parallèle, les observations plus classiques de séries temporelles d'élévation de la surface peuvent être associée à une identification visuelle ou acoustique du déferlement (Hothuijsen et Herbers 1986, Banner et coll. 2000, Babanin et coll. 2001, Manasseh et coll. 2006). Ces études ont abouti à la conclusion que le déferlement des vagues dominantes ne se produit que lorsque l'énergie de ces vagues dépasse un certain seuil. Ce seuil est une valeur constante lorsqu'on utilise l'énergie adimensionnelle, c'est à dire la cambrure, avec un certain facteur d'ajustement suivant la bande de fréquence sur la laquelle est intégrée le spectre. Ainsi, on peut relier la probabilité de déferlement des vagues à la grandeur adimensionnelle $B(\mathbf{k})$, définie par

$$B(\mathbf{k}) = \int_{\theta - \Delta\theta}^{\theta + \Delta\theta} \int_{k - \Delta k}^{k + \Delta k} k^2 E(k, \theta) \mathrm{d}k \mathrm{d}\theta.$$
(5.56)

La définition exacte de B dépend des valeurs de $\Delta\theta$ et Δk . Ainsi l'étude théorique de Phillips (1984) proposait de prendre $\Delta\theta = \Delta k = 0$, ce qui n'a pas de sens car dans ce cas B pourrait être très fort pour des vagues de très faible cambrure (e.g. infini pour des vagues monochromatiques). Les observations de Banner et coll. (2000) ont été faites avec $\Delta\theta = \pi$ et $\Delta k \simeq 0.6k$. Il est difficile d'étudier les variations de la probabilité de déferlement pour des valeurs plus faibles de $\Delta\theta$ du fait de l'incertitude statistique (Filipot et coll., travail en cours). Physiquement, cette probabilité de déferlement est associée à la présence de vagues assez cambrées, qui ne peuvent exister que si des trains d'ondes de nombres d'ondes voisin peuvent se superposer linéairement au sein de groupes. Ensuite ces vagues cambrées peuvent évoluer vers le déferlement de manière non-linéaire (Song et Banner 2002). Par ailleurs, le fait que B soit adimensionnel suggère que le déferlement ne dépend que de la forme géométrique des vagues, d'autres facteurs (vent, courant ...) n'ayant probablement qu'une importance secondaire.

D'abord démontré pour des vagues dominantes, ce seuil sur B a aussi été mis en évidence pour des vagues plus courtes (Banner et coll. 2002).

d. Paramétrage de la dissipation d'énergie

En dépit de quelques tentatives (Alves et Banner 2003, van der Westhuysen et coll. 2007), cette connaissance sur les probabilités de déferlement n'est pas encore utilisée dans la prévision numérique des vagues. En effet, les paramétrages proposés par ces auteurs étaient encore trop proches





(a) Détection de fronts déferlants (en noir) par imagerie infrarouge pour des micro-déferlements (tiré de Jessup et Phadnis 2005) , (b), (c), et (d) couverture d'écume pour des vents de 7, 10 et 14 m s⁻¹ (Melville et Matusov 2002), et (e) schéma définissant la fonction Λ de Phillips (tiré de Reul et Chapron 2003).





Probabilité b_T en fonction du degré de saturation du spectre. Le paramètre ε est défini par $\varepsilon^2 \simeq 4B(\mathbf{k})$ avec $\Delta \theta = \pi$ et $\Delta k \simeq 0.6k$. La valeur seuil à partir de laquelle le déferilement apparaît, $\varepsilon = 0.055$ correspond donc à $B(\mathbf{k}) \simeq 1 \times 10^{-3}$.

D. BILAN SPECTRAL

de formulations anciennes, ou trop peu généraux pour donner des résultats corrects dans des situations variées (e.g. Ardhuin et Le Boyer 2006). Par ailleurs des difficultés théoriques et techniques subsistent, en particulier pour relier des probabilités de déferlement à une dissipation spectrale. Il convient en effet de savoir combien il y a de vagues d'une échelle donnée par unité de surface, et il faut ensuite aussi déterminer l'intensité du déferlement. Ces questions sont l'objet de travaux actuels, et une première mise au point d'un terme de dissipation utilisant la dissipation est en cours au SHOM, et devrait être utilisée pour la prévision opérationnelle, dès la fin 2007. En effet les résultats sont déjà satisfaisants (meilleurs qu'avec les paramétrages usuels) dans les régions dominées par la houle.

Ainsi la prévision utilise plus souvent des formulations empiriques ajustées pour que les modèles reproduisent les observations de croissance des vagues sous l'effet du vent, et le développement complet de l'état de la mer. De ce fait, ces paramétrage ne sont pas faits pour fonctionner en eau peu profonde ou en présence de forts gradients de courant, et il est d'usage de leur ajouter un terme de déferlement 'bathymétrique' afin de dissiper correctement l'énergie des vagues s'approchant des plages (chapitre VIII).

Ces formulations empiriques reposent toutes sur le principe que le taux de dissipation est faible en moyenne, et peut donc s'exprimer comme une fonction quasi-linéaire du spectre (1974),

$$S_{\mathrm dis}(\mathbf{k}) = -KE(\mathbf{k}),\tag{5.57}$$

avec K un coefficient qui a priori peut avoir n'importe quelle forme. Cette expression ne fait que dire que l'effet du déferlement est d'enlever de l'énergie aux composantes qui en ont déjà. Partant de là, plusieurs auteurs ont essayé des formes aussi simples que possibles, et ont donc donné à K une dépendance simple en fonction de la fréquence.

Ainsi Komen et coll. (1984), sont arrivé, après ajustement aux lois de croissance à une forme $K = -C_{\text{dis}}\sigma^2\hat{\sigma}^5$ où C_{dis} est une vraie constante, et $\hat{\sigma}$ est une fréquence moyenne pour l'ensemble du spectre, soit une constante pour un état de mer donné, c'est le paramétrage qui fut utilisé pour le modèle WAM-Cycle 3, et c'est encore le paramétrage par défaut du modèle SWAN. Ce type de dissipation a été légèrement affiné, mais il est encore à la base d'une bonne partie des termes de dissipation employés (paramétrages "WAM-Cycle 4" et variantes). Il a le terrible défaut d'introduire une dépendance artificielle de la dissipation de la mer du vent vis à vis de la présence de houle. Cet effet peut conduire à des erreurs d'un facteur 2 sur l'énergie de la mer du vent, même en présence d'une houle modeste (Ardhuin et coll. 2007).

D. Bilan spectral

Quelle que soit les paramétrages choisis, le terme de source correspondant à la dissipation S_{dis} est ajusté pour que l'équation d'évolution du spectre

$$\frac{\mathrm{d}E\left(\mathbf{k}\right)}{\mathrm{d}t} = S_{\mathrm{in}}\left(\mathbf{k}\right) + S_{\mathrm{nl}}\left(\mathbf{k}\right) + S_{\mathrm{dis}}\left(\mathbf{k}\right) \tag{5.58}$$

reproduise à peu près les observations de croissance des vagues sous l'action du vent (Kahma et Calkoen, 1992). L'équation (5.58) est plus souvent ecrite sous forme Eulerienne

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{C}_{g} E) + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{C}_{k} E) = S_{\text{in}} (\mathbf{k}) + S_{\text{nl}} (\mathbf{k}) + S_{\text{dis}} (\mathbf{k})$$
(5.59)

où $\nabla_{\mathbf{x}}$ et $\nabla_{\mathbf{k}}$ sont les opérateurs de divergence dans l'espace physique et dans l'espace des nombres d'ondes et \mathbf{C}_g et \mathbf{C}_k sont les vitesses de propagation correspondantes. \mathbf{C}_g est le vecteur vitesse de groupe, qui pointe dans la direction de \mathbf{k} , tandis que \mathbf{C}_k représente le lent changement de direction du vecteur \mathbf{k} qui, au large et en l'absence de courant, n'est dû qu'à la courbure de la Terre : on peut montrer que les vagues se propagent le long de grands cercles autour de la terre, et donc leur direction, exprimée par rapport au Nord, change le long de cette trajectoire.

Dans l'ensemble, S_{in} génère un spectre avec un pic tel que la vitesse de phase soit de l'ordre de la vitesse du vent (c'est pour cela que les vents forts produisent des longues vagues dont la vitesse de phase est plus élevée). Cette énergie est redistribuée par les interactions non-linéaires vers les grandes longueurs d'ondes, ce qui augmente la période du pic et l'énergie totale (car les longues vagues sont très peu dissipées), et vers les petites longueurs d'ondes où l'énergie est fortement dissipée par la viscosité et le déferlement.



FIG. 5.10 – Equilibre des termes de source Termes de source pour un vent de 10 m/s avec un spectre initial nul. (a). au bout de 3 heures, (b) au bout de 4 jours (tiré de Janssen et al. 1994).

L'équilibre du spectre fréquence-direction lors de la croissance des vagues est illustré par la figure 5.12. Tous les modèles numériques opérationnels de prévisions globales des vagues sont basés sur une discrétisation de (5.59), une intégration dans le temps par différences finies, et un grossier paramétrage de S_{nl} (le DIA). Les deux paramétrages les plus utilisés à grande échelle sont ceux du modèle WAM-Cycle 4 (Janssen et coll. 1994, ci-dessous appelé "JHHK"), et le paramétrage de Tolman et Chalikov (1996, ci-dessous "TC"). Ces paramétrages sont implémentés dans des codes numériques tels que ECWAM au Centre Européen de Prévision à Moyen Terme (CETPMMT, ECMWF en anglais, voir Janssen et coll. (2005) ou WAVEWATCH III (Tolman 2002). Il est à noter que les paramétrages physiques sont largement interchangeables entre les codes numériques. Ainsi les trois "modèles" représentés en figure 5.12 sont en fait obtenu avec le code WAVEWATCH III pour les deux premiers et le code CREST pour le troisième. Les différents modèles donnent des hauteurs de vagues comparables pour le cas classique d'un vent perpendiculaire à une côte rectiligne, et plus généralement les résultat des modèles sont assez proches. Cependant, ils arrivent à ce résultat par des équilibres très différents, et peuvent aussi être très différents sur d'autres paramètres, en particulier l'étalement directionnel. En particulier, le terme $S_{\rm in}$ de TC est assez large au niveau du pic, comme le terme WAM-Cycle 3, tiré des observations de Snyder et coll. (1981) et plus étroit à haute fréquence comme le terme de Janssen (1991).



FIG. 5.11 – Trois modèles, trois équilibres

Termes de source pour un vent de 10 m/s à et un fetch de 40 km. A gauche, modèle de Tolman et Chalikov (1996), au centre, modèle WAM-Cycle 4, et à droite modèle WAM cycle 3 avec un calcul exact des interactions non linéaires au lieu du paramétrage DIA. On notera que les termes pour le modèle de Tolman et Chalikov (1996) ont été multipliés par un facteur 2 afin d'être sur la même échelle.

E. Modélisation numérique

La qualité des champs de vent, fournis par les modèles atmosphériques, est déterminante. Les modèles actuels tels que WAVEWATCH ou ECWAM peuvent donner des prévisions utiles jusqu'à des échéances d'une semaine. En pratique les champs de vents comportent certains biais qu'il convient de corriger. En particulier le paramétraeg de Tolman et Chalikov (1996) a été ajusté aux vents du U.S. National Center for Environmental Prediction (NCEP) qui sont en moyenne 0.5 m s⁻¹ plus forts que ceux du Centre Européen (ECMWF), auxquels sont ajustés les paramétrages de Bidlot et coll. (2005). Pour des échéances jusqu'à 24h la prévision peut être améliorée en assimilant des mesures de hauteur significative des vagues H_s faites par les altimètres embarqués sur ERS 2, GFO, JASON et ENVISAT. L'assimilation de spectres issus d'images SAR semble pouvoir donner de meilleurs résultats mais les méthodes d'assimilation sont à perfectionner. Ces modèles de vagues peuvent être utilisés par les modèles de circulation atmosphérique pour corriger les champs de vents, ou bien directement couplés pour modifier la rugosité des océans et les flux à la surface. Des modèles expérimentaux d'advection d'énergie de la houle (vagues pour lesquelles l'effet du vent est négligeable) permettent des prévisions pour des échéances de 10 à 15 jours dans le Pacifique.



FIG. 5.12 – Validation du modèle WAVEWATCH III à la bouée Météo-France - UK Met Office 62163, au large de la Bretagne.

Séries temporelles (en trait noir : observations) et diagramme de dispersion pour deux simulations réalisées avec le paramétrage de Tolman et Chalikov (1996, "TC") et le paramétrage de Bidlot et coll. (2005, "BAJ"). Ces simulations sont réalisées à partir du vent seul, sans assimilation de mesures de vagues, et sans recalage du paramétrage TC, d'où le biais important pour ce dernier. Ici est utilisé un forçage ECMWF de période 6 h, à partir des analyses de 00h et 12h et les prévisions à 6h des cycles de 00h et 12h. Le "scatter index" (SI) est en fait ici l'erreur en moyenne quadratique (RMSE) normalisée par les observations. Une utilisation des analyses et prévision du cycle de 00h seulement (prévisions de 6 à 18h) fait passer l'erreur relative de 11 à 18%. Toutes les mesures et sorties de modèles sont moyennées sur 3 heures afin de réduire l'incertitude des mesures qui est de l'ordre de 10% pour un intervalle de 1 h. Le paramétrage T

VI. EVOLUTION DES VAGUES DU LARGE VERS LA CÔTE

A chapitre précédent, nous avons supposé que le champ de vagues était uniforme horizontalement et la profondeur infinie. Or d'importantes variations des vagues sont justement provoquées par les variations de la profondeur.

A. Réfraction et diffraction

1. Réfraction

Nous avons vu au chapitre 1 que la vitesse des vagues était une fonction de la fréquence, de la profondeur. En présence d'un courant horizontal $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, uniforme sur la verticale, on observe aussi un décalage Doppler. La pulsation des vagues, dans un référentiel fixe devient alors $\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$, et la vitesse de phase est

$$C = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{g}{k}\tanh\left(kD\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}$$
(6.1)

Les variations de la vitesse de phase C induisent alors le phénomène de réfraction, découvert par Snel et Descartes en optique.

En absence de courant, cet effet est perceptible dès que la profondeur est inférieure à la moitié de la longeur d'onde environ $(kD < \pi)$. Soit deux zones de profondeurs uniformes H_1 et H_2 pour x < 0 et x > 0, alors la loi de Snel (aussi attribuée à Descartes¹) s'applique, exprimant la conservation du nombre d'onde k_y à la frontière,

$$\frac{\sin\theta_1}{C_1} = \frac{\sin\theta_2}{C_2} \tag{6.2}$$

où θ_1 et θ_2 sont les angles entre la direction de propagation et l'axe des x. Ce résultat s'applique à une plage dont la topographie est uniforme suivant y, dans ce cas $\sin \theta/C$ est conservé par la réfraction (figure 6.1).

Tous les résultats de l'optique géométrique s'appliquent, en remplaçant la vitesse de la lumière par C, en particulier le principe de Fermat : l'intégrale de C le long d'une trajectoire est minimale au sens des variations. Ainsi une bosse sur le fond est comme une lentille convergente, tandis qu'un creux sera divergent. C'est ainsi que les vagues convergent sur les caps, augmentant en hauteur. Les vagues qui se propagent contre une veine de courant localisée (la vitesse est nulle en dehors de la veine de courant) sont donc déviées vers son milieu, en plus d'être raccourcies en longueur d'onde par effet Doppler : les vagues sont plus hautes et plus pentues, donc plus dangereuses, comme c'est le cas dans le courant des Aiguilles.

On peut obtenir une équation différentielle pour les trajectoires suivies par les vagues à partir de ce même principe. Ces trajectoires sont aussi appelées rayons ou caractéristiques. Soit (x, y, θ) la position et direction des vagues en un point du rayon, et s l'abscisse curviligne le long du rayon, en absence de courant,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\left(\theta\right),\tag{6.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\left(\theta\right),\tag{6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{C} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}h} \left[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \cdot \sin\left(\theta\right) - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \cdot \cos\left(\theta\right) \right]. \tag{6.5}$$

¹Le mathematicien hollandais Willebrord Snel a découvert la loi de la réfraction en 1621, mais elle ne fut publiée qu'en 1703 dans l'ouvrage *Dioptrica*, de Christiaan Huygens, où Snel est nommé en latin (Snellius) ce qui conduit à la très fréquente erreur des anglo-saxons qui orthographient son nom 'Snell'. Le philosophe français René Descartes donne la loi de Snel dans son traité *La dioptrique*, un appendice de son célèbre *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, publié à Leiden en 1637, et apparemment inspiré des travaux de Snel bien que Descartes répéta les expériences de Snel en 1626 ou 1627. (Source : the MacTutor history of mathematics archive, University of St Andrews, Scotland, http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history)



FIG. 6.1 – directions de propagation pour des vagues incidente et réfléchies, de part et d'autre de deux discontinuités de la vitesse de phase C.

Pour une topographie naturelle, la réfraction est régulière et l'intensité des ondes réfléchies est généralement faible.

En absence de courant le déplacement d'un paquet d'onde est donné par sa vitesse $ds/dt = C_g$, dans la direction θ .

En présence de courant $ds/dt = |\mathbf{C}_g + \mathbf{U}|$ et la direction de propagation des vagues est différente de la direction perpendiculaire aux crêtes. Ces "rayons" ont été longtemps calculés à la main (Munk et Traylor 1947) puis de manière informatique (Dobson 1967). Au calcul à partir de directions parallèles au large (voir exemple en figure 6.2.a), on préfère depuis les années 1990 un calcul de "rétro-trajectoires" à partir d'un point fixe (voir exemple en figure 6.2.b), plus adapté à la propagation des états de mer aléatoires, décrits par leur spectre au large. Cette dernière méthode évite aussi les points singuliers provoqués par des caustiques, qui ne posent problème que lorsque l'on considère un train de vagues monochromatique.

2. Levage ('shoaling')

Les rayons, perpendiculaires aux crêtes des vagues, sont des lignes de courant pour l'énergie. Si on considère deux rayons du même train d'onde monochromatique, parallèles dans une région où C est uniforme (par exemple en eau profonde, kH >> 1, et en absence de courant) et espacés de Δl , le flux d'énergie entre les deux rayons $C_g E \Delta l$ est conservé le long de ce 'tube'. Toutes ces propriétés peuvent être démontrées à partir de l'équation de Laplace et des conditions à la limite en surface et au fond, en faisant l'hypothèse que les amplitudes et les vitesses de phase varient lentement.

En absence de courant et pour une plage dont la topographie est uniforme le long de l'axe des y, des vagues se propageant dans la direction de l'axe des x ont donc des rayons rectilignes, et Δl ne change pas le long du tube défini par deux de ses rayons. Par conséquent, la densité spatiale d'énergie E s'ajuste aux changements de la vitesse C_g (voir figure 1.54) pour que le flux $C_g E$ reste constant. En particulier près de la côte $C_g = (gH)^{1/2}$ et la densité d'énergie augmente comme $H^{-1/2}$. Or E est proportionnel au carré de la hauteur moyenne ou significative des vagues $H_s = 4 \left(E/\rho g \right)^{1/2}$ et $H_{\rm rms} = 2^{-1/2} H_s$. La hauteur des vagues augmente donc comme $H^{-1/4}$. Evidemment, cette hauteur ne devient pas infinie pour H = 0, car, auparavant, les vagues déferlent, ce que nous aborderons au chapitre suivant. Cette modification de la hauteur des vagues par changement de la vitesse de groupe est appelée levage ('shoaling' en anglais, de 'shoal' qui veut dire 'haut fond'). Pour le cas d'un haut fond, les rayons convergent et Δl diminue, ce qui augmente d'autant plus la hauteur des vagues. Si les rayons se croisent, on obtient une 'caustique' et la hauteur devient infinie. En pratique, l'amplification des vagues est finie car les rayons ont des positions différentes pour des fréquences différentes et donc les caustiques des différentes composantes du spectre ne sont pas localisées au même endroit. Pour des vagues monochromatiques cependant, la hauteur des vagues est, in fine, limitée par le déferlement ou bien la diffraction. Ce genre d'amplification locale est important en pratique, d'autant plus que le spectre des vagues est étroit.

A. RÉFRACTION ET DIFFRACTION



FIG. 6.2 – Exemples de deux méthodes de tracés de rayons.

a. Calcul réalisé "à l'ancienne" pour une houle d'ouest de période 15 s, aux abords de La Jolla, Californie. L'emplacement de quelques unes des bouées houlographes déployées pendant la campagne NCEX est figuré par les numéros 32 à 37 et les isobathes 10, 50, 100 et 200 m sont indiquées en pointillés. Tiré de Magne et coll. (2007). b. Calcul de rétro-tranjectoires à partir du point 34, pour la même période T = 15 s, et des directions d'arrivé régulièrement espacées à 1° d'intervalle. Seul les rayons qui atteignent le large, et qui sont donc susceptibles d'amener de l'énergie au point 34, ont été représentés (cela n'est vrai que dans l'approximation de l'optique géométrique et en négligeant la réflexion des vagues à la côte). Des marques régulières le long des rayons sont tracées à des distances correspondant à 60 secondes de temps propagation à la vitesse de groupe.



FIG.6.3- Exemple de propagation d'une houle monochromatique de période 16 s et d'amplitude 1 m au large.

Calcul réalisé avec le modèle elliptique aux différences finies de type Berkhoff étendu de Athanassoulis et Belibassakis (1999).

3. Diffraction

Nous avons considéré jusqu'ici que l'amplitude des vagues et les propriétés du milieu où elles se propagent variaient lentement par rapport à la période et à la longueur d'onde (approximation WKB). Il est déjà apparu que pour les caustiques dues à la réfraction d'une onde monochromatique ce n'est pas le cas, et ce n'est pas le cas non plus au voisinage d'obstacles tels que des digues, ou des brise-lames. Pour des vagues de faible amplitude et en négligeant les effets du vent et de la friction au fond, on peut utiliser les équations linéarisées. Sur un fond plat et en présence de tels obstacles on suppose que ϕ est de la forme

$$\phi = \hat{\phi}(\mathbf{x}) \frac{\cosh\left(k_0 z + k_0 D\right)}{\cosh\left(k_0 D\right)} e^{-i\omega t} + \text{ c. c.}, \qquad (6.6)$$

où $\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 D)$. ϕ vérifie la condition cinématique au fond et en surface, et l'équation de Laplace se réduit à l'équation de Helmoltz

$$\nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = 0. \tag{6.7}$$

Cette équation est elliptique et sa solution nécessite d'imposer des conditions sur tout un contour fermé. Si on prend pour $\hat{\phi}$ un train d'onde qui varie lentement dans l'espace sur une échelle $\tilde{\mathbf{x}} = \varepsilon x$, $\hat{\phi} = \hat{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}) e^{iS(\mathbf{x})}$, le nombre d'onde local est $\mathbf{k} = \nabla S$, et varie lui aussi lentement dans l'espace.

A. RÉFRACTION ET DIFFRACTION

On a alors

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \hat{\Phi} \mathbf{e}^{\mathrm{i}S} \right) \tag{6.8}$$

$$= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\left(\varepsilon \boldsymbol{\nabla} \hat{\Phi} + i \mathbf{k} \hat{\Phi} \right) e^{\mathbf{i} S} \right]$$
(6.9)

$$= \left[\varepsilon^2 \nabla^2 \hat{\Phi} + 2i\varepsilon \mathbf{k} \cdot \nabla \hat{\Phi} + \left(i\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{k} - k^2\right) \hat{\Phi}\right] e^{iS}$$
(6.10)

(6.11)

A l'ordre 0 en ε on néglige complètement les variations d'amplitude et on obtient $|k| = k_0$ et des trains d'onde qui se propagent tout droit. A l'ordre 1 on néglige les dérivées spatiales de $\hat{\Phi}$ pour ne garder que celles de la phase $S(\mathbf{x})$, et on retrouve nos trains d'onde qui se propagent tout droit. A l'ordre 1, on peut montrer (Mei, 1989, chapitre 3, voir aussi Ardhuin et Herbers, 2002) que si la pente du fond est aussi d'ordre ε , d'autres termes que $\hat{\phi}$ sont nécessaires pour satisfaire la condition cinématique au fond, et on obtient l'équation de conservation de l'action

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\sigma} \right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{E}{\sigma} \mathbf{C}_g \right) = 0.$$
(6.12)

La diffraction résulte des termes d'ordre 2, qui ont tendance à faire tourner les vagues vers les régions ou l'amplitude est plus faible.

Berkhoff (1972) a eu l'idée de supposer que, pour une pente douce du fond, ϕ est aussi de la forme donnée ci-dessus et vérifie les relations de polarisation et dispersion des vagues linéaires. Moyennant quelques calculs on obtient (voir par exemple Mei, 1989, chapitre 3) l'équation dite de la pente douce (ou équation de Berkhoff)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (CC_g \boldsymbol{\nabla} \zeta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \zeta = 0.$$
(6.13)

Il s'agit d'un extension de l'équation de Helmoltz à une faible pente du fond. Cette équation est très largement utilisée en génie côtier pour déterminer l'agitation des ports, en utilisant des modèles numériques aux éléments finis. Un exemple de résultat de ce type de modèle est montré en figure 6.3.

Radder (1979) a proposé une approximation 'parabolique' à cette équation elliptique, en négligeant les gradients de ζ dans le sens de propagation, ce qui conserve tout de même les effets de diffraction. Un modèle de ce type (dit réfraction-diffraction) est utilisé pour des prévisions de houle sur les côtes Californiennes (http://cdip.ucsd.edu) et bretonnes (http://surfouest.free.fr), à partir de prévisions au large. En effet, le plateau continental y est assez étroit pour négliger la génération locale des vagues. Contrairement aux abords d'ouvrages d'art, la diffraction y est généralement négligeable (O'Reilly et Guza 1991, Peak 2004). Ainsi, lors de la campagne Near Canyon EXperiment (NCEX) au large de La Jolla, Californie, qui a duré plus de trois mois, on n'a trouvé qu'un seul cas de houle mesurée avec une fréquence assez basse pour qu'un modèle prenant en compte la phase, par exemple un modèle de résolution de l'équation de Berkhoff, donne des résultats légèrement meilleurs que le tracé de rayons, et ce en quelques endroits seulement. Particulièrement là ou la variation du champ de vagues est très forte à l'échelle de la longueur d'onde, par exemple au dessus du canyon de Scripps, avec une variation d'un facteur 5 de la hauteur des vagues sur une distance inférieure à la longueur d'onde (figure 6.4).

On peut ainsi souvent se contenter d'un calcul de réfraction seul (figure 6.5). Ce type d'approche permet de prendre en compte les détails de bathymétrie et de la forme du spectre directionnel, ce qui est très important pour une côte découpée.

Hors des régions de forts courants et lorsque les faibles profondeurs sont assez peu étendue (ce qui limite l'effet du fond à la réfraction), la qualité des prévisions côtière semble limitée par les erreurs sur la forme du spectre directionnel. En particulier dans le Golfe de Gascogne, les calculs sont beaucoup plus précis sur les régions ou la côte est assez ouverte et peu découpée (par exemple sur la côte ouest d'Oléron, figure 6.6) que sur des côtes plus découpées comme le Finistère.



FIG. 6.4 – Observations et modélisation des vagues pendant NCEX.

Les hauteurs significatives (H_s) pour la bande de fréquence 0.04-0.08 Hz sont calculées a partir des spectres observés en moyenne de 13h30 à 16h30 UTC le 30 Novembre 2003. Les positions des bouées de mesure sont indiquées sur la figure 6.2. Les modèles utilisés sont : un modèle de tracé de rayons à rebours ("refraction", O'Reilly et Guza 1991), trois modèles elliptiques et une approximation parabolique de l'équation de Berkhoff ("Ref-dif" Kirby 1986). Les trois modèles elliptiques utilisent le même code numérique et résolvent les équations de Berkhoff ("Mild Slope Equation" ou MSE, 1972), leur version modifiée par Massel (MMSE, 1993) ainsi que leur extension par 3 modes évanescents et un mode local couplés (NTUA5, Athanassoulis et Belibassakis 1999). La différence qui apparaît entre le modèle de réfraction et les modèles elliptiques aux bouées 32, 36 et 37 est liée à la transmission d'ondes par effet "tunnel" à travers le canyon, malgré sa grande profondeur (voir aussi Thomson et coll. 2005). Cet effet tunnel ne peut pas être représenté dans l'approximation de l'optique géométrique sur laquelle repose le tracé de rayon du modèle de réfraction. Figure tirée de Magne et coll. (2007).



FIG. 6.5 – Evaluation de modèles de propagation en zone côtière

(a) carte de la mer d'Iroise et position de 3 bouées de mesure mises en place par le CETMEF en 2004. (b) comparaison entre les observations (en noir) à la bouée Iroise de hauteur (Hs), direction moyenne au pic (th1p), étalement directionnel au pic (sth1p) et fréquence du pic (fp), et le calcul (en rouge) réalisé avec un tracé de rayons utilisant des spectres prévus au large avec le modèle WW3-SHOM forcé par les vents analysés du CEPMMT. On constate un bon accord général, sauf pour le paramètre sth1p : les spectres observés sont plus étroits que les spectres calculés. (c) et (d) comparaisons entre observations à la bouée Blancs Sablons (c) et Bertheaume (d), et deux calculs : l'un réalisé comme précédemment (vert), l'autre réalisé à partir des spectres estimés par la méthode MEM appliquée aux observations de la bouée Iroise. On remarque que le calcul à partir de spectres calculés est plus précis que le calcul à partir de spectres mesurés car le point Iroise est trop abrité des vagues de sud et nord pour être représentatif des conditions au large. On peut constater aussi que la tempête du 5 mai 2004 ($H_s = 5.3$ m à Iroise) est bien atténuée aux Blancs Sablons ($H_s = 1.2$ m), et complètement absente à Bertheaume ($H_s = 0.4$ m). Cet effet est normal car il s'agit d'une tempête de nord-ouest. Au contraire, le 25 avril, les vagues d'ouest sont très peu atténuées à Bertheaume, et beaucoup plus faibles aux Blancs Sablons.



FIG. 6.6 – Comparaison entre modèle (en rouge) et observations moyennes sur 3 heures (en noir), par 20 m de fond au large du phare de Chassiron (ile d'Oléron). Le modèle est WW3-SHOM à 0.5° de résolution, forcé par le vent du CEPMMT avec un zoom à 0.1° de résolution dans le golfe de Gascogne.

B. Autres effets du fond pour des vagues linéaires

1. Diffusion et réflection partielle

La réfraction découle d'une approximation de type WKBJ, pour les quelles la profondeur H - h doit peu varier à l'échelle de la longueur d'on de des vagues. Ce n'est parfois pas le cas et les variations de plus petite échelle h ont certainement un effet sur les vagues. Une manière de représenter cet effet dans l'équation d'évolution spectrale consiste à décomposer les variations topographie h, à petite échelle, en sinusoïdes de vecteur d'on de l,

$$h\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{\mathbf{l}} B_{\mathbf{l}}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},\tag{6.14}$$

et de calculer l'interaction du spectre de vagues avec chaque sinusoïde. Formellement, on obtient un forçage des vagues par la topographie de la même manière qu'au chapitre 2 on avait un forçage des vagues par la turbulence du vent (Hasselmann, 1966). Au premier ordre, en pente de fond ($\varepsilon = lh$), on obtient une résonance entre deux vagues de nombres d'ondes \mathbf{k} et \mathbf{k}' , tels que k = k', qui échangent de l'énergie grâce à la présence d'ondulation du fond qui ont pour vecteur d'onde $\mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ (figure 6.7). L'effet local de cette diffusion de Bragg est une modification du spectre directionnel des vagues. Si la topographie du fond est dominée par les grandes échelles ($l \ll k$), le résultat est une augmentation de l'étalement directionnel des vagues, ce qui correspond à un raccourcissement de la longueur moyenne des crêtes, donnant un aspect plus confus au champ de vagues.

Pour une topographie dont la variance est importante à l = 2k, les vagues sont rétro-diffusées (Heathershaw, 1982), et la hauteur des vagues diminue fortement dans la direction initiale de propagation. Un tel effet, mais de faible amplitude, a été observé en présence de barres multiple aux voisinage d'une plage (Elgar et coll. 2003). La théorie pour des vagues aléatoire a été formulée par Ardhuin et Herbers 2002) donne un terme de diffusion par la topographie S_{bscat} qui a été validé par d'autres théories pour de faibles amplitudes du fond $h/H \ll 1$ par Magne et coll. (2007), avec une extension à la présence d'un courant moyen. Ces théories de diffusion prévoient un élargissement directionnel important pour des spectres étroits sur le plateau de Caroline du Nord, en accord avec les observations, et dans le sud



FIG. 6.7 – Condition de résonance pour la diffusion vagues-topographie du premier ordre, en absence de courant

L'interaction entre une vague de vecteur d'onde \mathbf{k}' et une ondulation du fond de vecteur d'onde \mathbf{l} crée une vague diffusée de vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{l}$. Pour \mathbf{k} fixe, les \mathbf{k}' et \mathbf{l} resonnant sont sur les cercles en trait continu et pointillé, respectivement.

de la mer du Nord (WISE 2007), ce qui reste à vérifier. Ces deux régions sont caractérisées, entre autres, par des étendues importantes de faible profondeur et des fonds sableux. Dans ce type d'environnements les 'sandwaves' sont générées par les courants de marée, conduisant à un spectre caractéristique du fond (Hino 1968).

2. Frottement sur le fond

Tous les processus décrits jusqu'ici dans ce chapitre conservent l'énergie des vagues et sont assez bien connus car ils sont décrits par des équations simples dans des milieux homogènes. L'effet de la friction au fond est beaucoup plus complexe car il dépend de la nature du fond (sable, vase, roche, présence d'algues) qui est généralement très variable. Par ailleurs, cet effet dépend de la topographie du fond à petite échelle, qui, si le fond est mobile, est elle-même modelée par les vagues. Enfin, les écoulements sont turbulents, ce qu'il faut paramétrer.

a. Couche limite

La couche limite au fond permet le raccord entre la vitesse oscillante associée aux vagues, déterminée par la théorie linéaire au chapitre 1, et une vitesse nulle sur le fond. Il s'agit d'une couche très fine dont l'épaisseur est de l'ordre de $\delta = u_\star/\omega$ soit 10 cm ou moins, beaucoup plus fine que la couche limite du courant moyen (de l'ordre de $\delta_c = u_\star/f$ avec f le paramètre de Coriolis). Par conséquent, le cisaillement et la turbulence y sont très intenses. En présence de vagues et de courants la sous-couche limite due aux vagues impose la rugosité pour la couche limite du courant, on y reviendra au chapitre suivant. On supposera ici que le courant moyen est nul. Le frottement peut être visqueux (très près de la surface) ou turbulent. En général le fond est assez rugueux pour que le frottement soit largement déterminé par les décollements de l'écoulement sur le fond et la traînée induite par les éléments de rugosités. Ces éléments peuvent être tout ce qui fait partie de la topographie, du grain de sable aux rides (figure 6.8). Mais, comme le mouvement des vagues oscille avec une amplitude typique $a_{b,rms}$, seule la topographie d'échelle horizontale inférieure à $a_{b,rms}$ est importante.

La turbulence près du fond se manifeste sous la forme de tourbillons dont la taille charactéristiques au niveau $z = -H + \delta$ est $\kappa \delta$. Le "temps de retournement d'un tourbillon" est de l'ordre de $\kappa \delta/u_{\star}$. On peut définir une viscosité turbulente K_z par $u_{\star}^2 = \overline{u'w'} = K_z \partial u/\partial z$. Pour un flux turbulent u_{\star}^2 constant, le paramétrage de Prandtl $K_z = \kappa(z + H)u_{\star}$ donne un profil logarithmique, $\partial u/\partial z = u_{\star}/(\kappa z)$. En cherchant le niveau δ tel que ce temps soit de l'ordre de la période des vagues 1/f on trouve que l'épaisseur de la couche limite est d'environ $\delta = u_{\star}/(\kappa f) \approx \sqrt{K_z/f}/\kappa$.



FIG. 6.8 – Ecoulement près d'une paroi solide : illustration de l'importance du décollement sur la traînée. Des décollements peuvent se produire à toutes les échelles. Ainsi la tension subie par un grain de sable est généralement plus faible que la tension totale sur le fond qui englobe aussi la traînée sur les rides et les éléments de plus grande échelle.

On peut aussi exprimer u_{\star} avec un coefficient de frottement f_w , $u_{\star}^2 = 0.5 f_w u_{\infty}^2$, avec u_{∞} la vitesse orbitale des vagues au dessus de la couche limite. Experimentalement on trouve que f_w est variable, toujours inférieur à 0.3. Pour une rugosité fixe il semble que f_w soit une fonction de l'echelle physique de la rugosité k_s (comparée a l'amplitude du mouvement orbital A) et du nombre de Reynolds Re. En particulier f_w décroît quand A/k_s augmente, si bien que la couche limite des vagues ne dépasse pas la dizaine de centimètres d'épaisseur.

Dans la couche limite on peut donc, en première approximation, supposer le mouvement uniforme horizontalement (la couche limite est beaucoup plus mince que la longueur d'onde des vagues), et écrire l'équation du mouvement sous la forme,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_w} \nabla p + \frac{\partial u'w'}{\partial z} \tag{6.15}$$

En posant $u - u_{\infty} = \hat{u} e^{i\omega t}$, une paramétrisation de type Prandtl $u'w' = K_z \partial u/\partial z$ avec $K_z = \kappa(z+H)u_{\star}$ aboutit à une équation différentielle du type suivant (Kajiura 1968, Grant et Madsen 1979),

$$\frac{\partial}{\partial z^{\star}} \left(z^{\star} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z^{\star}} \right) + \mathrm{i}\widehat{u} = 0, \tag{6.16}$$

avec $z^* = \omega(z + H)/(\kappa u_*)$. L'avantage de cette paramétrisation est qu'une solution analytique existe. En imposant la condition de raccord, $u - u_{\infty}$ tend vers zéro quand z^* tend vers l'infini, on trouve

$$u = \left[1 - \frac{\ker(2\sqrt{z^{\star}}) + \mathrm{i}\mathrm{kei}(2\sqrt{z^{\star}})}{\ker(2\sqrt{z^{\star}}) + \mathrm{i}\mathrm{kei}(2\sqrt{z^{\star}})}\right] u_{\infty},\tag{6.17}$$

avec z_0^{\star} la rugosité hydrodynamique adimensionnelle, $z_0^{\star} = \omega z_0/(\kappa u_{\star})$. La valeur de z_0 pour un fond sableux parfaitement lisse et un sable bien trié est égale, d'après Nikuradse (1933), à $D_{50}/30$ avec D_{50} la taille médiane des grains.

Les fonctions de Kelvin ker et kei ressemblent à des logarithmes dans la limite $z^* \to 0$ et oscillent en fonction de z^* pour $z^* \to \infty$. En général on trouve que l'oscillation dans la couche limite est de plus forte amplitude et en avance de phase par rapport à l'écoulement potentiel au dessus (figure 6.9). On peut ainsi calculer la tension près du fond, donnée au chapitre précédent (6.24) en utilisant la limite $z^* \to 0$.

Ce modèle de viscosité linéaire a été étendu à des profils plus réalistes (K_z diminue audelà de la couche limite), ce qui change très peu les résultats, et variables dans le temps (voir Trowbridge et Madsen 1984, Wiberg 1995, Davies et Villaret 1999, Marin 2004). Le profil de vitesse est assez peu sensible à ces modifications (figure 6.9). Par contre on trouve une modification sensible de la tension de cisaillement sur le fond τ , qui est importante pour la remise en suspension de sédiment, avec une asymétrie assez marquée entre la phase d'accélération de l'écoulement et la phase de décélération.

Par ailleurs, la dissipation des vagues liée au frottement sur le fond est donnée par le travail de la tension de cisaillement sur le mouvement orbital $\overline{\tau u}$

b. Rugosité du fond

Sur un fond rocheux la forme du fond ne change pas, ce qui simplifie les choses. Par contre, la vase peut être liquéfiée par le mouvement oscillatoire imposé par les vagues, qui y donne alors



FIG. 6.9 – Comparaison entre les profils de vitesse dans la couche limite observés par Jensen et coll.(1989) pour des nombres de Reynolds élevés et les modèles proposés par Wiberg (1995). Dans ce cas la périod des vagues est de 10 s, et l'amplitude des oscillations de vitesse est de 1 m s⁻¹. Le trait plein est le résultat du modèle avec $K_z = \kappa u_{\star}(z + H)e^{-z^{\star}}$ constant, et les pointillés représente une extension avec un K_z variable. A gauche : phase d'accélération, à droite : phase de décélération (illustration tirée de Wiberg 1995).

des ondes internes. On sait en tout cas que la dissipation sur un fond vaseux peut être assez forte pour dissiper complètement les vagues en quelques kilomètres de propagation.

Sur des fonds sableux, la formation de rides par le mouvement des vagues détermine l'intensité de la dissipation d'énergie (Zhukovets, 1963; Nielsen, 1992) en modifiant la rugosité équivalente de Nikuradse (1933) k_N , définie comme la taille des grains de sable qui donnent la même valeur du paramètre de rugosité $z_0 = 30k_N$ dans le cas d'un écoulement unidirectionnel. On peut supposer que les profils de vitesses ne dépendent de la nature du fond que par cette rugosité. Il convient de préciser que la couche limite sous les vagues est oscillante et donc k_N peut varier même si le fond ne bouge pas car k_N dépend de la fréquence des vagues et de l'amplitude du mouvement orbital au-dessus de la couche limite.

En négligeant le courant moyen, la couche limite du fond peut être classée en trois régimes, en fonction du rapport entre les forces de friction et de flottabilité exercées sur un grain de sable, représentées par le nombre de Shields maximum ψ_{\max} (souvent noté θ'_{\max})

$$\psi_{\max} = \frac{f'_w u_{\max}^2}{(s-1)gD},$$
(6.18)

où f'_w est un facteur de friction visqueuse, s est la densité relative du sable (par rapport à l'eau, s = 2,65 pour le quartz qui constitue l'essentiel du sable en général), D est le diamètre des grains de sable que l'on suppose uniforme pour commencer (Shields, 1936).

Pour de faibles valeurs de ψ_{\max} , la friction est insuffisante pour faire bouger les grains de sable et le fond ne bouge pas. La rugosité est donc 'fossile', elle dépend de l'activité biologique et des vagues passées. La dissipation de l'énergie des vagues est généralement faible dans ce cas. On peut représenter cette dissipation par un facteur f_e qui est en quelque sorte un coefficient de traînée moyen qui relie le cube de la vitesse moyenne au dessus de la couche limite à la dissipation d'énergie.

Quand la vitesse associée aux vagues augmente, f_e croît rapidement dès que les grains de sable sont mis en mouvement. Des rides régulières se forment spontanément, en quelques périodes de vagues si la vitesse est suffisante. Le seuil de mise en mouvement du sable est donné par ψ_c , qui varie entre 0,03 et 0,1 pour du quartz, suivant la taille D des grains (voir par exemple Soulsby, 1997). Ces rides augmentent la dissipation d'énergie par la traînée due à la différence de pression de part et d'autre d'une crête qui est le résultat du décollement de l'écoulement et de la formation de tourbillons de sillage. Des expériences de Madsen, Mathisen et Rosengaus (1990) avec des vagues aléatoires montrent que f_e est maximum pour $\psi_{\rm rms} \simeq 1, 2\psi_c$, avec $\psi_{\rm rms}$ calculé à partir de la vitesse moyenne (moyenne



FIG. 6.10 – Les trois régimes de la couche limite sur fond sableux

(a) rugosité fossile ou d'origine biologique. (b) formation de rides. (c) sheet flow. Sur chaque schéma la longeur d'onde L des vagues et la profondeur sont largement réduite par rapport à la réalité $L \approx 100$ m, contre 1 m environ pour la longueur d'onde des rides. Les flêches horizontales indiquent le profil de vitesse sous les crêtes (la vitesse s'inverse sous les creux des vagues). Les petites flèches dans (b) représentent les tourbillons dans le sillage des rides.

quadratique) avec une formule identique à (6.18). Par exemple sur des sables fins (D = 0, 15 mm), ce maximum est atteint par 25 m de fond pour des houles de période $T_p=12$ s et de hauteur significative $H_s = 1, 5$ m. Si la vitesse au-dessus de la couche limite augmente encore, f_e décroît peu à peu et les rides sont progressivement aplanies par l'écoulement.

Pour de très grandes valeurs de ψ_{max} , de l'ordre de $10\psi_c$ (Li et Amos, 1999), une couche de sédiments ('sheet flow') est fluidifiée et mise en mouvement avec la colonne d'eau : les rides sont complètement effacées. Dans ce cas la rugosité et la dissipation d'énergie dans la couche limite sont relativement plus faibles. Le mouvement des grains de sable dans la couche de sédiment en mouvement est largement influencé par les collisions entre grains. Dans ce régime, f_e augmente légèrement avec ψ . Ces trois régimes, rugosité fossile, rides en formation , et 'sheet flow' sont illustrés par la figure 6.10.

Par analyse dimensionnelle et modélisation numérique, Andersen (1999) et Andersen et Fredsøe (1999) ont montré que les rides s'auto-organisent pour obtenir des longueurs d'onde de l'ordre de $\lambda = 0.63d$ avec d le diamètre des trajectoires des particules d'eau, au dessus de la couche limite, et une pente de l'ordre de 15%. C'est ce qui est aussi observé pour des profondeurs de plus de 10 m pour des vagues aléatoires, en prenant comme valeur de d la valeur significative $2^{1/2}d_{\rm rms}$ (Traykovski et coll., 1999; Ardhuin et coll. 2002). Par contre, plus près de la côte, il semble que les rides aient souvent des longueurs d'ondes bien plus courtes (Dingler, 1974).

La représentation de l'effet des rides de sable dans les modèles de vagues (voir Graber et Madsen, 1988; Tolman, 1994) fait appel à un prédicteur de rugosité qui détermine k_N à partir du spectre des vagues, de la profondeur, et de la nature des sédiments, et un modèle de couche limite qui permet de calculer la dissipation correspondante. La plupart des modèles de couche limite représentent la turbulence par un profil vertical de viscosité turbulente (Kajiura, 1968; Grant et Madsen, 1979; Weber, 1991*a*, 1991*b*; voir Wiberg, 1995, pour une discussion des différents modèles). Le fait que l'on puisse utiliser une seule valeur de la rugosité k_N pour l'ensemble du spectre a été validé par Mathisen et Madsen (1999). En pratique, le terme de dissipation $S_{\rm fric}$ de l'équation d'évolution du spectre est linéarisé par rapport au spectre d'énergie (ou d'action) des vagues en supposant que le spectre des vagues est étroit et en utilisant un modèle de couche limite pour les vagues monochromatiques 'équivalentes'.

Avec le modèle de couche limite de Grant et Madsen (1982), on obtient une formulation quasi-linéaire

$$S_{\text{fric}}(f,\theta) = \lambda(f) \times E(f,\theta)$$
(6.19)

$$\lambda(f) = -f_e u_{\rm b,rms} \frac{(2\pi f)^2}{2g\sinh^2(kH)}$$
(6.20)

Le diamètre des grains de sable est représenté par sa valeur médiane en masse D_{50} pour lequel est calculé la valeur critique ψ_c du nombre de Shields, à partir de laquelle le sable est mis en mouvement. Les vagues sont représentées par les moyennes quadratiques, au dessus de la couche limite, de la vitesse orbitale, $u_{\rm b,rms}$, et du déplacement horizontal $a_{\rm b,rms}$:

$$u_{\rm b,rms}^2 = \int_{\mathbf{k}} \frac{8\pi^2 f^2}{\sinh^2(kh)} E(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k}, \qquad (6.21)$$

$$a_{\rm b,rms}^2 = \int_{\mathbf{k}} \frac{2}{\sinh^2(kh)} E(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k}.$$
(6.22)



FIG. 6.11 – Exemple de facteurs de dissipation f_e en fonction du nombre de Shields $\psi_{\rm rms}$ La ligne continue est la paramétrisation de Tolman (1994) pour du sable fin ($D_{50} = 0, 15$ mm), et une période des vagues de T = 14 s. Les tirets correspondent aux valeurs de f_e données par la paramétrisation dite de 'JONSWAP', qui ne prend pas en compte la formation de rides.

Le modèle de couche limite donne le facteur de frottement visqueux f'_w , le nombre de Shields $\psi_{\rm rms} = f'_w u_{\rm b,rms}/[g(s-1)D_{50}]$, et le facteur de friction totale (due à la viscosité et à la traînée) f_w , qui est le rapport de la tension de cisaillement τ et de $u_{\rm b,rms}^2$:

$$\frac{z_0}{l} = \sqrt{\frac{2}{f'_w \text{ ou } f_w}} \frac{D \text{ ou } k_N}{30\kappa \ a_{\text{b,rms}}},$$
(6.23)

$$f'_w \text{ or } f_w = \frac{\kappa^2}{2\left[\ker^2\left(2\sqrt{z_0/l}\right) + \ker^2\left(2\sqrt{z_0/l}\right)\right]} \quad . \tag{6.24}$$

où z_0/l est une rugosité adimensionnelle, κ est la constante de Von Karman ($\kappa = 0, 4$), ker et kei sont les fonctions de Kelvin d'ordre 0 et 1.

Pour $\psi_{\rm rms}/\psi_c < 1, 2, k_N$ est imposé (constant ou variant faiblement avec $a_{\rm b,rms}$), et pour $\psi_{\rm rms}/\psi_c > 1, 2 k_N$ est déterminé par la somme d'une rugosité des rides k_r et d'une rugosité du 'sheet flow' k_s , qui sont données empiriquement par Madsen et coll. (1990) et Wilson (1989) :

$$k_r = a_{\rm b,rms} \times 1.5 \left(\frac{\psi_{\rm rms}}{\psi_c}\right)^{-2.5},\tag{6.25}$$

$$k_s = 0.57 \frac{u_{\rm b,rms}^{2.8}}{[g(s-1)]^{1.4}} \frac{a_{\rm b,rms}^{-0.4}}{(2\pi)^2}.$$
(6.26)

Actuellement quasiment tous modèles de vagues utilisent une paramétrisation empirique dite de 'JONSWAP', qui suppose que la dissipation est proportionnelle au spectre de variance de vitesse au fond, sans prendre en compte la nature du fond,

$$S_{\text{fric, JONSWAP}}(f, \theta) = -\Gamma \left[\frac{2\pi f}{g\sinh(kh)}\right]^2 E(f, \theta).$$
(6.27)

Une valeur moyenne $\Gamma = 0.038 \text{ m}^2 \text{s}^{-3}$ a été déduite de la campagne JONSWAP en mer du Nord (Hasselmann et coll., 1973), malgré une variabilité observée de Γ (de 0.0019 à 0.160 m²s⁻³). Ce type





Effets des différentes échelles de la topographie sous-marine sur les vagues (l'abscisse $2\pi/l$ est l'inverse de la longueur d'onde de la topographie), pour une houle modéré (de longueur d'onde $k/2\pi$ et d'amplitude horizontale au fond $d_s/2$, indiqués par les lignes verticales). La courbe épaisse est un spectre de pente pour le plateau de caroline du Nord pour des longueurs d'onde de plus de 40 m, calculé à partir de relevés hydrographiques. Le micro-relief du fond sur le fons sableux, pour des longueurs d'onde de moins de 10 m, est généré par les vagues. Le spectre pour les rides formées par le mouvement orbital des vagues est estimé à partir d'images SONAR à balayage latéral. Ces rides augmentent grandement la dissipation de l'énergie des vagues lorsqu'elles sont en formation, elles peuvent être effacées lorsque la vitesse au fond devient grande (tirets).

de paramétrisation donne de bons résultats en moyenne, mais on peut avoir quelques surprises (figure 6.13).

3. Résumé

En eau peu profonde (H < 0, 5L), les vagues sont influencées par la présence du fond, en plus des interactions avec l'air et des interactions entre vagues. Si on laisse de côté le déferlement qui a lieu au voisinage de la plage, l'effet du fond dépend de la taille relative des vagues et de la topographie sousmarine (figure 6.12). Tous ces effets sont supposés indépendants les uns des autres, et indépendants des processus d'interaction des vagues entre elles ou avec l'atmosphère (voir Komen et coll., 1994, pour une vague justification de cette pratique). On arrive donc à une équation d'évolution spectrale qui prend en compte l'ensemble des phénomènes sous la forme d'une collection de termes de source. Sous forme langragienne, on a pour le spectre d'action $A = E/\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\left(\mathbf{k},\mathbf{x},t\right) = \left[S_{\mathrm{in}} + S_{\mathrm{nl}} + S_{\mathrm{dis}} + S_{\mathrm{fric}} + S_{\mathrm{bscat}} + \cdots\right]\left(\mathbf{k},\mathbf{x},t\right)$$
(6.28)



FIG. 6.13 – Rides de sable et dissipation des vagues

En haut : trois exemples de champ de rides vues par sonar à balayage latéral (chaque carré fait 30 m de côté). Et en dessous, résultats de modèles sur le plate au continental de Caroline du Nord montrant l'erreur relative sur la hauteur significative H_s en fonction d'un nombre de Shields normalisé représentatif de la zone. Chaque point correspont à une heure de mesures à la plate forme de Chesapeake Lighthouse par 18 m de profondeur. Seules les pério des dominées par la houle lors de la campagne SHOWEX 1999 sont montrées. A gauche : modèle sans dissipation, H_s peut être prévu 4 fois plus grand que la hauteur mesurée, au centre paramétrisation "JONSWAP standard", et à droite, paramétrisations prenant en compte la formation de rides.

C. Modèles non-linéaires de propagation

1. Equations de Boussinesq et KdV

On vient de voir que la description des vagues comme une somme de train d'ondes linéaires de phases aléatoires permet de prendre en compte beaucoup de phénomènes physiques dans une équation d'évolution spectrale qui est relativement simple à intégrer et fournit une description des vagues depuis leur génération jusqu'à leur dissipation. Cette description est intéressante tant que les vagues sont effectivement faiblement non-linéaires. Le cas échéant, et en particuler au voisinage de la zone de déferlement des vagues, il peut être plus judicieux d'adopter dès le départ une description non-linéaire.

Sans revenir à la forme non-linéaire des équation d'Euler (voire de Navier-Stokes), et en gardant l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel, on peut intégrer les équations non-linéaires pour le potentiel des vitesses par des méthodes aux éléments frontières, ce qui marche jusqu'au déferlement des vagues, mais reste très couteux numériquement. Les équations de Boussinesq (1872) offrent une alternative intéressante, en considérant la non-linéarité $\varepsilon = ka$ et la dispersion kH comme deux petits paramètres, et en supposant que a/H et $(kH)^2$ sont du même ordre, on obtient la forme des équations de Boussinesq donnée par Peregrine (1967). Ces équations sont de plus en plus utilisées grâce à l'augmentation de la puissance de calcul, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine spectral où on intègre une équation d'évolution pour le spectre et le bispectre (voir Herbers et Burton, 1997). Dans tous les cas, il s'agit de modèles bidimensionnels, car la structure verticale de la fonction de courant est prescrite par l'ordre du développement en kH.

Dans le cas où les vagues sont unidirectionnelles, on obtient l'équation KdV (Korteweg et de Vries, 1895, voir Miles, 1981, pour un historique) qui est aussi due à Boussinesq (1872) :

$$\zeta_t + (gh)^{1/2} \left(\zeta_x + \frac{3}{2h} \zeta \zeta_x + \frac{h^2}{6} \zeta_{xxx} \right) = 0, \tag{6.29}$$

où les indices représentent des dérivées partielles par rapport à x ou t. Cette équation est un modèle relativement simple pour des systèmes faiblements dispersifs et faiblements non-linéaires. Comme les équations de Boussinesq, ses solutions ondulatoires peuvent exhiber des oscillations récurrentes des amplitudes (récurrence de Fermi, Pasta et Ulam, 1955), qui d'un point de vue linéaire, sont dues aux interactions quasiment résonnantes des triplets de vagues en eau peu profonde ($kh \ll 1$). L'équation KdV est aussi intéressante car elle peut être résolue de manière exacte par la transformée de diffusion inverse. On peut ainsi décomposer les conditions initiales à t = 0 en un ensemble de vagues cnoïdales solutions de l'équation KdV. Ces vagues évoluent et leur amplitude est donnée pour tout t > 0 par une matrice d'interaction qui est constante (voir par exemple Osborne et coll., 1996). Parmi ces vagues cnoïdales, on trouve des solitons de forme

$$\zeta = a \cosh^{-2} \left[\left(\frac{3a}{h^3} \right)^{1/2} (x - Ct) \right]$$
(6.30)

dont la vitesse de propagation est $c = (gH)^{1/2} \left(1 + \frac{a}{2H}\right)$ avec $a \ll H$. Toutefois, l'équation KdV est bien moins utilisée que les équations de Boussinesq, en particulier parce que les vagues sont supposées unidirectionnelles. Il existent de nombreuses autres équations non-linéaires qui représentent certaines propriétés des vagues (équation de Shrödinger non-linéaire, équation de Dysthe, de Zakharov, de Kadomtsev-Petviashvili ...) qui sont utilisées pour certaines applications où la non-linéairité est jugée importante, comme les vagues scélérates, par exemple (Onorato et al. 2002, Osborne et al. 2003).



FIG. 6.14 – Soliton solution de l'équation KdV pour $H=10~{\rm m}$

VII. INTERACTIONS VAGUES - COURANTS

A. Effets du courant sur les vagues

1. Vagues sur un courant variant verticalement

Lorsque le courant varie verticalement, le décalage Doppler subi par la pulsation des vagues ω peut être calculé en faisant appel à l'équation de Rayleigh (5.29). Biesel (1950) a donné des solution de cette équation pour $kD \ll 1$ et un courant variant linéairement de \hat{u}_{-D} au fond à \hat{u}_0 en surface. La vitesse de phase est alors,

$$C = \left[\left(\frac{U_0 - U_{-D}}{2} \right)^2 + gD \right]^{1/2}$$
(7.1)

Pour un profil plus général et une profondeur quelconque, Kirby et Chen (1989) ont donné une solution approchée dans la limite ou les variation de U sont faibles devant σ/k ,

$$C = \frac{\sigma}{k} + 2 \int_{-D}^{0} \mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{u}} \frac{\cosh(2kz + 2kD)}{\sinh(2kD)} \mathrm{d}z$$
(7.2)

2. Variation horizontale du courant et refraction

Comme les variation de profondeur, les variations de courant modifient la vitesse de phase et induisent une réfraction. Dans ce cas il convient de faire attention au fait que la direction de propagation peut être différente de la direction perpendiculaire aux crêtes.

Landau et Lifshitz (1960) ont donné un résultat simple sur la courbure des rayons acoustiques dans un milieu de vitesse variable. Ce résultat a été "redécouvert" pour les vagues par Dysthe (2001). Dans la limite ou $\hat{u} \ll C$, le rayon de courbure des rayons est

$$\frac{1}{\partial \theta / \partial s} = \frac{C_g}{\boldsymbol{\nabla} \times \widehat{\mathbf{u}}_h} \tag{7.3}$$

avec $\nabla \times \hat{\mathbf{u}}_h$ la vorticité de l'écoulement horizontal.

3. Conservation de l'action

Les vagues se propageant dans un milieu matériel, elles sont susceptibles d'échanger de l'énergie avec les autres mouvements qui animent le milieu, en particulier le courant moyen, la turbulence, les ondes internes. On peut montrer, a partir de la mécanique Hamiltonienne que l'énergie E n'est pas conservée dans un milieu non-homogène (courants, accélérations et profondeurs variable). Par contre l'action $A = E/\sigma$ est conservée (Bretherton et Garrett, 1968), avec σ la pulsation intrinsèque des vagues. En négligeant les effets non-linéaires et la tension de surface,

$$\sigma = \left[gk \tanh\left(kH\right)\right]^{1/2}.\tag{7.4}$$

Ce résultat est général en physique : l'action A est un invariant adiabatique. Pour un pendule dont la longueur varie doucement c'est ainsi $A = E/\sigma$ qui est conservée et non pas E. Dans le cadre des équivalences ondes-particules A est en fait le nombre de particules. L'équation d'évolution du spectre s'écrit donc pour la densité spectrale d'action $A(\omega, \theta, \phi, \lambda, t)$ où ϕ et λ sont la longitude et la latitude, respectivement (Komen et coll., 1994) :

$$\frac{\partial}{\partial t}A + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\dot{\phi}A\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dot{\lambda}A\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\dot{\sigma}A\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{\theta}A\right) = S,\tag{7.5}$$

où S est la somme des termes qui représentent les interactions avec l'air et le fond et les interactions entre les vagues et θ est l'angle entre le Nord géographique et la direction locale de propagation,

$$\dot{\phi} = (C_q \cos \theta + \overline{v}) R^{-1} \tag{7.6}$$

$$\dot{\lambda} = (C_g \sin \theta + \overline{u}) (R \cos \phi)^{-1}$$
(7.7)

$$\dot{\theta} = C_g \sin \theta \tan \phi R^{-1} + \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} (kR)^{-1}$$
(7.8)

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t},\tag{7.9}$$

où u et v sont les courants moyens zonaux et méridiens.

B. Mouvements Lagrangiens et Eulériens

Nous avons vu au chapitre 1 que le mouvement orbital des vagues induit une dérive dans le sens de propagation, la dérive de Stokes \mathbf{U}_s . Cette dérive est intimement liée aux oscillations verticales et horizontales induites par le mouvement orbital. On peut ainsi séparer le mouvement de dérive d'une particuler en une dérive de Stokes et un courant Eulérien $\hat{\mathbf{u}}$ qu'on appellera simplement "courant". La dérive de Stokes peut être assez importante. Au large, elle atteint 1.3% de la vitesse du vent en surface. Près de la côte elle est amplifiée quand la profondeur diminue et peut atteindre 0.5 m/s dans la zone de déferlement. Pour des vagues de cambrure maximale, Longuet-Higgins (1979) a calculé, en négligeant la viscosité, que la dérive pouvait atteindre 27% de la vitesse de phase. Enfin, le déferlement des vagues peut induire des vitesses importantes, en surface, dans le front déferlant (Melville et Rapp 1988). Ces deux effets seront négligés dans ce qui suit.

1. Flux de masse et de quantité de mouvement

On peut définir le flux de masse (aussi appelé transport) moyen $\mathbf{M}^w = (M_x^w, M_y^w)$ associé aux vagues par la différence entre le transport total \mathbf{M} et le transport du courant Eulérien moyen, $\widehat{\mathbf{M}}$,

$$M^{w}_{\alpha} = M_{\alpha} - \widehat{M}_{\alpha} = \int_{-h}^{\zeta} \rho_{w} \left(\widehat{u}_{\alpha} + \widetilde{u}_{\alpha}\right) \mathrm{d}z - \int_{-h}^{\zeta} \rho \widehat{u}_{\alpha} \mathrm{d}z.$$
(7.10)

Avec cette définition, le transport induit par les vagues est égal, en absence de courant, au transport total. En utilisant les vitesses issues de la théorie linéaire, on trouve, au second ordre en pente des vagues,

$$M^w_{\alpha} = \int_0^{\zeta} \rho u_{\alpha} \mathrm{d}z, \qquad (7.11)$$

$$= E \frac{C_g}{C} \frac{k_\alpha}{k}, \tag{7.12}$$

On remarque que le flux de masse associé à la propagation des vagues est 1/C fois le flux d'énergie.

Si l'on considère que ce flux est la somme des flux entre des niveaux fixes z et z + dz, des vagues monochromatiques ont un flux de profil parabolique, concentré dans la région -a < z < a avec a l'amplitude de ces vagues. Pour des vagues aléatoires le flux sera compris entre le creux le plus bas et la crête la plus haute. C'est le point de vue Eulérien sur la dérive de Stokes.

2. Moyenne Lagrangienne généralisée

Toutefois cette description ne correspond pas à la dérive de particules en suspension qui suivent la dérive de Stokes telle que définie au chapitre I avec le point de vue Lagrangien. La vitesse de dérive d'une particule dans le cas général est la vitesse Lagrangienne $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_s$. Intégrées sur la verticale les deux expressions du transport \mathbf{M}^w sont indentiques.

En trois dimensions les points de vue Eulériens et Lagrangiens sont tout à fait différents et pour certaines applications (comme le transport de matière en suspension ou l'étude de propriétés près



FIG. 7.1 – Schéma de principe de la moyenne Lagrangienne généralisée

de la surface) il peut être avantageux d'adopter un point de vue Lagrangien. De part les changements de coordonnées qu'elle impose, cette idée peut faire frémir les habitués de la mécanique des fluides. Les vagues permettent toutefois une simplification de taille : les déplacements sont quasi-périodiques. On peut alors définir des changements de coordonnées relativement simples qui aboutissent à des équations tout à fait maniables. En particulier, Andrews et McIntyre (1978) ont défini une moyenne Lagrangienne généralisée.

Pour tout champ scalaire ϕ , on définit le champ ϕ^{ξ} à la position moyenne **x**, par

$$\phi^{\xi}(\mathbf{x},t) = \phi\left(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x},t),t\right) \tag{7.13}$$

On peut définir la moyenne Lagrangienne généralisée si la fonction Ξ telle que $\Xi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t)$ est bijective. Dans ce cas il existe un champ de vitesse unique $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ tel que quand le point \mathbf{x} se déplace à la vitesse \mathbf{v} , alors le point matériel $\mathbf{x} + \xi$ se déplace à la vitesse du fluide \mathbf{u}^{ξ} (figure 7.1), ce qui s'écrit mathématiquement,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{u}^{\boldsymbol{\xi}} \tag{7.14}$$

Pour tout opérateur de moyenne Eulérienne, on note $\overline{\phi(\mathbf{x}, t)}$ la moyenne de $\phi(\mathbf{x}, t)$ (ce peut être une moyenne sur des phases, des réalisations, une moyenne temporelle ou spatiale). Alors on obtient la définition de la moyenne Lagragienne généralisée (GLM) en imposant

$$\overline{\xi\left(\mathbf{x},t\right)} = 0 \tag{7.15}$$

$$\overline{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t). \tag{7.16}$$

La vitesse en moyenne GLM est $\overline{\mathbf{u}}^L = \mathbf{v}$, et on peut ainsi définir les moyennes de n'importe quelle variable. Ainsi la moyenne GLM est différente de la moyenne Eulérienne. La différence entre ces deux moyennes est la correction de Stokes (Andrews et McIntyre 1978). La correction de Stokes de la vitesse est, par définition, la vitesse de Stokes

$$\mathbf{U}_s = \overline{\mathbf{u}}^L - \overline{u}.\tag{7.17}$$

 $\overline{\mathbf{u}}^L$ s'interprète simplement comme la vitesse de dérive moyenne des particules d'eau. De manière plus générale, pour un champ continuement différentiable ϕ , la correction de Stokes est donnée par (Andrews et McIntyre 1978a, équation 2.27)

$$\overline{\phi}^{L} = \overline{\phi} + \overline{\xi_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}} + \frac{1}{2} \overline{\xi_j \xi_k} \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial \xi_j \partial \xi_k} + O(\varepsilon_1^3)$$
(7.18)

On peut, par exemple, appliquer cette relation pour calculer les gradients moyens de vitesse en présence de vagues (Ardhuin et Jenkins 2006). Pour des vagues monochromatiques, au-dessus d'un fond

en pente faible, on rappelle les champs de pression et de vitesse donnés par la théorie d'Airy (1841)

$$\widetilde{p} = \rho_w ga \left[F_{CC} \cos(kx_1 - \omega t) O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right]$$
(7.19)

$$\widetilde{u}_1 = a\sigma \left[\frac{k_1}{k} F_{CS} \cos(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right]$$
(7.20)

$$\widetilde{u}_2 = a\sigma \left[\frac{k_2}{k}F_{CS}\cos(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2)\right]$$
(7.21)

$$\widetilde{u}_3 = a\sigma \left[F_{SS} \sin(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right]$$
(7.22)

avec $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ et ω le nombre d'onde et la pulsation, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ le vecteur d'onde, et σ défini par $\sigma^2 = gk \tanh(kD)$, où g est l'accélération de la gravité et D la profondeur d'eau moyenne. Les notation $F_{CS} = \cosh(kz + kD)/\sinh(kD)$ et $F_{SS} = \sinh(kz + kD)/\sinh(kD)$ ont été utilisées.

En intégrant dans le temps on trouve le déplacement des particules fluides,

$$\xi_1 = -a \left[\frac{k_1}{k} F_{CS} \sin(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right], \qquad (7.23)$$

$$\xi_2 = a \left[\frac{k_2}{k} F_{CS} \sin(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right], \qquad (7.24)$$

$$\xi_3 = a \left[F_{SS} \cos(kx_1 - \omega t) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \right].$$
(7.25)

Pour simplifier les notations, on choisit la direction 1 dans le sens de propagation des vagues. Les corrections de Stokes (7.18) des cisaillements sont alors,

$$\frac{\overline{\partial \widetilde{u}}^{L}}{\partial z} = \overline{\xi_{1}} \frac{\overline{\partial^{2} \widetilde{u}}}{\partial x \partial z} + \overline{\xi_{3}} \frac{\overline{\partial^{2} \widetilde{u}}}{\partial z^{2}} = \frac{a^{2}}{2} k^{2} \sigma F_{CS} F_{SS}$$
(7.26)

$$\frac{\overline{\partial \widetilde{w}}^{L}}{\partial x} = \overline{\xi_{3}} \frac{\overline{\partial^{2} \widetilde{w}}}{\partial x \partial z} + \overline{\xi_{1}} \frac{\overline{\partial^{2} \widetilde{w}}}{\partial x^{2}} = \frac{a^{2}}{2} k^{2} \sigma F_{CS} F_{SS}.$$

$$(7.27)$$

Ces expressions se généralisent aux vagues aléatoires car les termes de second ordre sont le résultat de corrélations entre termes de premier ordre (voir par exemple Kenyon 1969 pour une discussion similaire). Ainsi, les deux cisaillements moyens sont chacun égaux à la moitié du gradient vertical de la dérive de Stokes U_s ,

$$\frac{\overline{\partial \widetilde{u}}^{L}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial \widetilde{w}}^{L}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_{s}}{\partial z}, \qquad (7.28)$$

avec $u = u_1$, $w = u_3$, $x = x_1$ and $z = x_3$.

Le changement de coordonnée implicitement associé à la moyenne GLM par la fonction Ξ conserve le volume au premier ordre en ε_1 , les moyennes obtenues sont donc, en première approximation, des moyennes sur un volume (Jenkins et Ardhuin 2004). On retrouve que la vorticité du mouvement est nulle $(\partial \tilde{w}/\partial x^L - \partial \tilde{u}/\partial z^L = 0)$, ce qui est normal puisque (7.20)–(7.25) ont été déterminées pour un mouvement irrotationnel. Par contre, la vitesse résiduelle U_s est bel et bien rotationnelle¹. La moyenne non-nulle de $\partial w/\partial x$ pourrait, par erreur, être interprétée comme conduisant à une valeur infinie de w quand x tend vers l'infini, ce qui n'est pas le cas. Cette moyenne correspond plutôt au fait qu'il y a plus d'eau sous les crêtes que sous les creux des vagues, les crêtes contribuent donc plus à la moyenne (figure 7.2). Ces propriétés permettent de calculer la production ou destruction d'énergie cinétique turbulente (ECT) par le cisaillement des vagues. En supposant que la turbulence n'est pas corrélée avec la phase des vagues et en utilisant les hypothèse usuelles d'uniformité horizontale de la couche limite océanique, cette production d'ECT se fait au taux,

$$P_{ws} = \overline{\rho_w u_1' u_3'}^L \left(\frac{\overline{\partial \widetilde{u}}^L}{\partial z} + \frac{\overline{\partial \widetilde{w}}^L}{\partial x} \right) = \overline{\rho_w u_1' u_3'}^L \frac{\partial U_s}{\partial z}, \tag{7.29}$$

comme si la dérive de Stokes était un courant verticalement cisaillé.

¹Ceci montre la non-commutation de l'opérateur GLM avec l'opérateur rotationnel. L'opérateur GLM commute cependant avec la dérivée Lagrangienne, c'est d'ailleurs l'intérêt principal du GLM (voir Andrews et McIntyre 1978a).



FIG. 7.2 – Vitesse induite par les vagues (flèches fines) et processus de mélange dans l'océan superficiel. Les flux d'énergie cinétique turbulente entre l'atmosphère et l'océan sont largement supportés par le déferlement d'ondes courtes (e.g. Donelan 1998) et sont en partie transmis par les circulations de Langmuir qui sont un ensemble de tourbillons d'échelles multiples alignés dans la direction du vent et brassant l'ensemble de la couche de mélange. Dans la limite des petites pentes pour les grandes vagues, ces processus ne sont pas modifiés en moyenne et le cisaillement moyen induit par les grandes vagues est donné par (7.28). La production d'énergie cinétique turbulente par interaction des vagues et de la turbulence est donc le flux turbulent vertical de quantité de mouvement horizontale (flèches épaisses) multiplié par la moyenne en volume du cisaillement induit par les vagues. Cette moyenne en volume donne plus de poids aux crêtes par rapport aux creux.

C. Effets des vagues sur la circulation

1. Quantité de mouvement totale et tensions de radiation

a. En absence de courant moyen

La mise en évidence systématique de ces effets est due a Longuet-Higgins et Stewart (1964) dont la démonstration est reproduite ici. Ils introduisent un 'tenseur des contraintes radiatives' qui, de la même manière que les tenseurs de Reynolds, représentent un flux de quantité de mouvement dû à la moyenne des vitesses et pression des vagues sur plusieurs périodes des vagues. L'élégance de cette théorie vient du fait qu'elle permet d'obtenir des résultats qui néssiteraient de longs calculs par la méthode des perturbations que nous avons utilisée auparavant, car ces effets sont dus aux non-linéarités des vagues, qui ici sont représentées implicitement par des équations de conservation.

La quantité de mouvement étant un vecteur on peut considérer ses trois composantes, qui chacune sont advectée dans trois directions. On définit ainsi S^{rad} le flux de quantité de mouvement associé aux vagues, moyenné sur plusieurs périodes et intégré sur la verticale S^{rad} est donc un tenseur. C'est sa divergence qui fournit une accéleration aux particules fluides, comme on peut le concevoir en considérent un cube élémentaire.

Pour des vagues monochromatiques se propageant dans la direction de l'axe des x, le flux par unité de surface à travers une surface élémentaire perpendiculaire à (Ox) est la somme de la quantité de mouvement advectée ρu^2 et de la force exercée par le fluide sur cette surface, donc la pression p. En prenant la moyenne de son intégrale sur la verticale et en soustrayant le flux en absence de vagues $(u = 0 \ p_0 = -\rho gz)$ on a le flux dû aux vagues :

$$S_{xx}^{rad} = \left\langle \int_{-H}^{\zeta} p + \rho u^2 \mathrm{d}z \right\rangle - \int_{-H}^{0} p_0 \mathrm{d}z \tag{7.30}$$

La pression en présence de vagues est obtenue en intégrant l'équation d'Euleur pour le mouvement vertical (v = 0 car les vagues se propagent dans la direction (Ox) :

$$\int_{z}^{\zeta} \left[\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^{2}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right] dz = 0$$
(7.31)

Le premier terme donne

$$\int_{z}^{\zeta} \frac{\partial \rho w}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z}^{\zeta} \rho w dz - \rho w \left(\zeta\right) \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$
(7.32)

le second donne

$$\int_{z}^{\zeta} \frac{\partial \rho u v}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z}^{\zeta} \rho u w dz - \rho u(\zeta) w(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
(7.33)

et le troisième donne

$$\int_{z}^{\zeta} \frac{\partial \rho w^{2}}{\partial z} dz = \rho w^{2} \left(\zeta\right) - \rho w^{2} \left(z\right)$$
(7.34)

et en supposant $p(\zeta) = 0$, le quatrième nous donne la pression à la profondeur z, ce que l'on cherche,

$$\int_{z}^{\zeta} \frac{\partial p}{\partial z} \mathrm{d}z = -p(z).$$
(7.35)

En rassemblant tous les termes et en utilisant la condition cinématique en surface, on obtient la pression

$$p = \rho g \left(\zeta - z\right) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z}^{\zeta} \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z}^{\zeta} \rho u w dz - \rho w^{2}$$
(7.36)

qui, en moyennant sur plusieurs périodes, donne, pour des vagues linéaires ($\langle uw \rangle = 0$)

$$\langle p \rangle = \rho g \left(\langle \zeta \rangle - z \right) - \rho \left\langle w^2 \right\rangle.$$
 (7.37)

On calcule alors S_{xx}^{rad} en le découpant en morceaux, et en généralisant à $S_{\alpha\beta}^{rad}$ on a

$$S_{\alpha\beta}^{rad} = \left\langle \int_{-h}^{\zeta} \rho u_{\alpha} u_{\beta} dz \right\rangle + \delta_{\alpha\beta} \left(\int_{-h}^{0} \langle p \rangle - p_{0} dz + \left\langle \int_{0}^{\zeta} p dz \right\rangle \right).$$
(7.38)

Les termes de pression n'interviennent que pour S_{xx}^{rad} et S_{yy}^{rad} car la pression est une contrainte normale. Puisqu'on a choisi v = 0 en prenant des vagues se propageant suivant (Ox), il est clair que $S_{xy}^{rad} = S_{yx}^{rad} = 0$.

On remplace maintenant dans l'expression de $S^{rad}_{\alpha\beta}$ avec les vitesses et pressions issues de la théorie linéaire le premier morceau $\left\langle \int_{-H}^{\zeta} \rho u_i u_j dz \right\rangle$ n'intervient que dans S_{xx} et on l'a quasiment déjà calculé au chapitre 1, car le flux d'énergie est la même intégrale avec pu au lieu de u^2 or $u = p/C\rho$ avec $C = \omega/k$ la vitesse de phase. Donc le premier morceau est égal à EC_g/C . Pour le dernier morceau on peut remplacer p au voisinage de ζ par $\rho g \zeta$ et ce morceau nous donne $\rho g \langle \zeta^2 \rangle /2$, l'énergie potentielle, soit E/2. Enfin on utilise notre expression de p pour le deuxieme morceau,

$$\int_{-h}^{0} \langle p \rangle - p_0 dz = \rho g h \langle \zeta \rangle - \rho g \frac{a^2 k}{\sinh(2kh)} \int_{-h}^{0} \sinh^2(kz + kh) dz$$
(7.39)

et en utilisant la relation $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$ on a

$$\int_{-h}^{0} \sinh^{2} \left(kz + kh\right) dz = \frac{1}{4k} \left(\sinh\left(2kh\right) - 2kh\right)$$
(7.40)

et donc notre second morceau se transforme en

$$\int_{-h}^{0} \langle p \rangle - p_0 dz = \rho_w gh \langle \zeta \rangle + \frac{\rho_w g}{2} E\left(2\frac{kh}{\sinh\left(2kh\right)} - 1\right).$$
(7.41)

Enfin le troisième morceau donne,

$$\left\langle \int_{0}^{\zeta} p \mathrm{d}z \right\rangle = \rho_{w} g \left\langle \frac{\zeta^{2}}{2} \right\rangle = \rho_{w} g \frac{E}{2}.$$
(7.42)
C. EFFETS DES VAGUES SUR LA CIRCULATION

Par convention les terme qui font intervenir $\langle \zeta \rangle$ sont en général sortis de $S^{rad}_{\alpha\beta}$ car ils correspondent à des pression hydrostatiques dues à un changement du niveau moyen à cause des vagues, et sont rajoutés dans les équations du mouvement comme une pression additionnelle. On a donc

$$S_{xx}^{rad} = \rho_w g E \left(\frac{C_g}{C} + \frac{1}{2} \frac{2kD}{\sinh(2kD)} \right)$$
(7.43)

$$S_{yy}^{rad} = \rho_w g \frac{E}{2} \frac{2kD}{\sinh(2kD)}$$
(7.44)

$$= \rho_w g \frac{E}{2} \left(2 \frac{C_g}{C} - 1 \right) \tag{7.45}$$

Cette expression n'est valable que dans le repère tel que les vagues se propagent dans la direction de (Ox). Pour une direction de propagation quelconque faisant un angle θ avec l'axe (Ox), il faut modifier la partie non-isotrope de $S_{\alpha\beta}^{rad}$ qui fait intervenir l'advection de la quantité de mouvement. u devient $u \cos \theta$ et v devient $v \sin \theta$. Du coup S_{xy}^{rad} et S_{yx}^{rad} ne sont plus nuls :

$$S_{xx}^{rad} = \rho_w g E \frac{C_g}{C} \cos^2 \theta + \rho_w g \frac{E}{2} \left(2\frac{C_g}{C} - 1 \right)$$
(7.46)

$$S_{yy}^{rad} = \rho_w g \left[E \frac{C_g}{C} \sin^2 \theta + \frac{E}{2} \left(2 \frac{C_g}{C} - 1 \right) \right]$$
(7.47)

$$S_{xy}^{rad} = S_{yx}^{rad} = \rho_w g E \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta$$
(7.48)

b. Effet d'un courant moyen

En présence d'un courant moyen, la quantité de mouvement des vagues est aussi advecté par le courant et réciproquement. On trouve alors qu'il faut ajouter $\hat{U}_{\alpha}M^w_{\beta} + \hat{U}_{\beta}M^w_{\alpha}$ à l'expression de $S^{rad}_{\alpha\beta}$ pour trouver le flux total de quantité de mouvement induit par les vagues.

2. Quantité de mouvement de la circulation et tensions d'interaction

a. Equations intégrées sur la verticale : mouvement total

A partir du calcul des tenstion de radiation on trouve l'équation de Phillips (1977) pour la quantité de mouvement totale, à laquelle on a aussi incorporé la rotation de la terre,

$$\frac{\partial}{\partial t}M_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta i}f_{i}M_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[U_{\alpha}M_{\beta} + S^{\mathrm{rad}}_{\alpha\beta}\right] = -\rho_{w}gD\frac{\partial\widehat{\zeta}}{\partial x_{\alpha}} + \tau_{a\alpha} - \tau_{b\alpha}$$
(7.49)

avec τ_a et τ_b les tensions de vent et de frottement au fond. Le paramètre $\varepsilon_{\alpha\beta i}$ est la signature de la permutation (α, β, i) , elle vaut 0 si un indice est répété, 1 si la permutation (α, β, i) s'obtient par décalage de (1, 2, 3), et -1, si une paire d'indices est permutée. Cette notation permet d'écrire le produit vectoriel du paramètre de Coriolis vectoriel (f_1, f_2, f_3) et du flux de masse horizontal (M_1, M_2) . En général, et ici par la suite, on ne retient que la composante verticale f_3 du paramètre de Coriolis. La vitesse U_{α} est définie ici comme la vitesse du transport de masse, $U_{\alpha} = M_{\alpha}/(\rho_w D)$. En combinaison avec l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_w D \right] + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_\alpha = 0. \tag{7.50}$$

L'équation (7.49) est largement utilisée pour la modélisation de la zone côtière en particulier. Un de ses défauts, cependant, est que la quantité de mouvement totale M_{α} est la combinaison des vagues et de la circulation qui ont des comportements extrêmement différents et pour lesquels il est aberrant d'avoir des paramétrages communs. De plus, les vagues sont généralement connues comme un forçage. Hasselmann (1971) a été le premier a souligner ce problème, suivi par Garrett (1976), dont nous reprenons le raisonnement.

b. Equations intégrées sur la verticale : vagues

La quantité de mouvement des vagues (parfois appelée "pseudo-quantité de mouvement"), est, pour une vague monochromatique, $\mathbf{M}^w = \mathbf{k}E/\sigma = \mathbf{k}A$. Il faut noter qu'il s'agit là de la quantité de mouvement du oscillations rapides, qui est généralement compensée par un mouvement lent, comme dans le cas d'un paquet d'onde isolé. C'est en ce sens que la quantité de mouvement (totale, nulle pour un paquet d'onde isolé) se distingue de la pseudo-quantité de mouvement. On dispose d'une équation d'évolution pour A, il nous faut donc une équation d'évolution pour \mathbf{k} afin d'arriver à une équation pour \mathbf{M}^w .

De part leurs définitions, (3.2)–(3.3), k et $\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$, sont reliés par,

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \right) = 0. \tag{7.51}$$

En utilisant la relation de dispersion on trouve,

$$\frac{\partial k_{\alpha}}{\partial t} + \left(\widehat{u}_{A\beta} + C_{g\beta}\right)\frac{\partial k_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = -k_{\beta}\frac{\partial\widehat{u}_{A\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{k\sigma}{\sinh 2kD}\frac{\partial D}{\partial x_{\alpha}},\tag{7.52}$$

où $\hat{u}_{A\beta}$ est la composante β du courant qui advecte l'action des vagues. Si le courant est verticalement uniforme et en négligeant les interactions vagues-vagues, il s'agit du courant Eulérien, $\hat{u}_{A\beta} = \hat{u}_{\beta}$, sinon on pourra consulter Kirby et Chen (1989) ou Weber et Barrick (1977).

On peut donc formuler une équation pour la quantité de mouvement des vagues. En prenant $U_{A\beta} = \overline{u}_{\beta}$, on obtient,

$$\frac{\partial M_{\alpha}^{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[(\overline{u}_{\beta} + C_{g\beta}) M_{\alpha}^{w} \right] = \rho_{w} g \int k_{\alpha} \frac{S_{\text{tot}}}{\sigma} d\mathbf{k} - M_{\beta}^{w} \frac{\partial \overline{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \rho_{w} S^{J} \frac{\partial D}{\partial x_{\alpha}}.$$
 (7.53)

avec

$$S^{J} = \frac{1}{D} \int_{\mathbf{k}} \left(C_{g} - \frac{C}{2} \right) \frac{E(\mathbf{k})}{C} d\mathbf{k} = g \int_{\mathbf{k}} \frac{kD}{\sinh 2kD} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$
(7.54)

Cette équation exprime la conservation de la pseudo-quantité de mouvement (PQDM) des vagues advectées à la vitesse $\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_g$ avec une modification par les processus qui contribuent à l'évolution de l'action des vagues (les termes de source) et une force, $-\rho_w S^J \partial D / \partial x_\alpha$, liée aux variations de profondeur. Cette force est indispensable pour compenser les variations de flux de quantité de mouvement. Elle peut, a priori, venir d'une force de pression non-hydrostatique sur le fond, auquel cas il y aurait un flux de quantité de mouvement à travers le fond, qui modifie la PDQM des vagues, ou bien d'une interaction avec la colonne d'eau avec conservation de la QDM totale du fluide.

c. Equations intégrées sur la verticale : mouvement moyen

En soustrayant (7.53) de (7.49) et en utilisant $M_{\alpha} = M_{\alpha}^m + M_{\alpha}^w$, avec $M_{\alpha}^m = \rho_w \overline{u}_{\alpha} D$, valable pour un courant \overline{u}_{α} uniforme sur la verticale, on obtient, comme donné par Smith (2006),

$$\frac{\partial M_{\alpha}^{m}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\int_{-h}^{\zeta} \overline{u}_{\beta} \overline{u}_{\alpha} dz \right) + \overline{u}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{w} D \right] + \varepsilon_{\alpha\beta3} f_{3} M_{\beta}^{m} + \left[\rho_{w} g D - p_{0}^{w} \right] \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_{\alpha}}$$
$$= -\varepsilon_{\alpha\beta3} \left(f_{3} + \Omega_{3} \right) M_{\beta}^{w} - \rho_{w} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(DS^{J} \right) + \tau_{\alpha}^{a} - \tau_{\alpha}^{w} - \tau_{\alpha}^{b} - \tau_{\alpha}^{dis} + \rho_{w} S^{J} \frac{\partial D}{\partial x_{\alpha}}, \quad (7.55)$$

où Ω_3 est la composante verticale de la vorticité de l'écoulement moyen, DS^J vient de la différence entre les tensions de radiation et le flux de PQDM induit par les vagues et, à l'ordre ε_1^2 , la pression Eulérienne moyenne est l'opposée de la variance de vitesse verticale, soit en surface,

$$p_0^w = -\int_{\mathbf{k}} \sigma^2 E\left(\mathbf{k}\right) \mathrm{d}\mathbf{k}.$$
(7.56)

Enfin, $\tau_{\alpha}^a - \tau_{\alpha}^w$ est le flux direct de quantité de mouvement entre l'atmosphère et la circulation océanique, avec

$$\tau_{\alpha}^{w} = \rho_{w}g \int_{\mathbf{k}} \frac{k_{\alpha}S^{\mathrm{in}}(\mathbf{k})}{\sigma} \mathrm{d}\mathbf{k}, \qquad (7.57)$$



FIG. 7.3 – Equilibre des forces pour des vagues au-dessus d'une marche lissée.

En absence de réflexion et de dissipation des vagues, la force correspondant à la divergence du flux de quantité de mouvement induit par les vagues se combine avec la pression moyenne. Cette combinaison est généralement équilibrée par un gradient de pression hydrostatique associé au gradient de la surface libre. L'accélération de la circulation moyenne (petites flèches en pointillés) n'apporte, en général, qu'une faible correction à cet équilibre. En absence de réflexion, il n'y a pas de force exercée par le fond, outre la pression hydrostatique.

 et

$$\tau_{\alpha}^{\rm dis} = \rho_w g \int_{\mathbf{k}} \frac{k_{\alpha} S^{\rm dis}(\mathbf{k})}{\sigma} \mathrm{d}\mathbf{k},\tag{7.58}$$

est le flux de quantité de mouvement lié à la dissipation des vagues par déferlement et interaction avec la turbulence océanique (mais pas par frottement sur le fond, voir Longuet-Higgins 2005).

On peut enfin regrouper les termes en S^J de (7.55) en suivant Smith (1990),

$$\frac{\partial M^m_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\int_{-h}^{\overline{\zeta}} \overline{u}_{\beta} \overline{u}_{\alpha} dz \right) + \overline{u}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_w D \right] + \varepsilon_{\alpha\beta3} f_3 M^m_{\beta} + \left[\rho_w g D - p_0^w \right] \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_{\alpha}} \\
= -\varepsilon_{\alpha\beta3} \left(f_3 + \Omega_3 \right) M^w_{\beta} - \rho_w D \frac{\partial S^J}{\partial x_{\alpha}} + \tau^a_{\alpha} - \tau^w_{\alpha} - \tau^b_{\alpha} - \tau^{\rm dis}_{\alpha},$$
(7.59)

d. Conséquences pour la réfraction et le levage par la topographie

Les deux termes en S^J dans (7.55) représentent la pression moyenne induite par les vagues, qui agit logiquement sur la circulation moyenne, et une force supplémentaire $\rho_w S^J \partial D / \partial x_\alpha$ qui compense la force $-\rho_w S^J \partial D / \partial x_\alpha$ qui agit sur la PQDM dans (7.53). Il apparaît donc que ce deuxième terme est une interaction entre la circulation moyenne et l'état de mer, il n'y a donc pas d'interaction avec le fond. Ainsi, en absence de frottement sur le fond et sans réflexion des vagues, la force moyenne exercée par le fond sur la colonne d'eau n'est que la pression hydrostatique. Il n'y a pas de force moyenne et la réfraction et le levage ne sont pas la conséquence d'une force exercée par le fond, mais seulement le résultat d'une modification du guide d'onde, sans échange d'énergie ou de quantité de mouvement avec l'extérieur (Longuet-Higgins 1967, 1977, Ardhuin 2006).

On peut alors reconsidérer le problème de vagues unidirectionnelles se propageant audessus d'une marche d'escalier lissée avec un changement de profondeur de h_1 à h_2 (Whitham 1962, section 2). Nous sommes d'accord avec Whitham sur la conservation du flux de masse $E_1/C_1 + \rho_w(h_1 + \bar{\zeta}_1)U_1 = E_2/C_2 + \rho_w(h_2 + \bar{\zeta}_2)U_2$, mais par contre, pour la quantité de mouvement notre conclusion est différente de la sienne. La différence de flux de PQDM $C_{g2}/C_2E_2 - C_{g1}/C_1E_1$ ne correspond pas à la force exercée sur la marche, comme suggéré par Whitham, mais à une force exercée sur l'écoulement moyen, à laquelle s'ajoute le gradient de la pression induite par les vagues S^J pour donner les tensions de radiation classiques. Dans le cas d'une dissipation négligeable, l'ensemble des deux termes est compensé par une variation de la surface libre : la décôte (figure 7.3). Cette conclusion est vérifiée expérimentalement par les mesures de la dépression du niveau moyen faites par Saville (1961, voir aussi l'analyse faite par Longuet-Higgins and Stewart 1963, et Phillips 1977) et Bowen et coll. (1968).

En outre il doit aussi y a avoir une divergence de la circulation moyenne pour compenser la divergence de la dérive de Stokes. Toutefois, la divergence correspondante de quantité de mouvement moyen (flèches courtes en pointillés sur la figure 7.3) est généralement beaucoup plus faible que les tensions de radiation à cause du rapport des flux de quantité de mouvement et de masse des vagues, qui est égal à la vitesse de groupe C_g , qui est en générale plus grande que le rapport correspondant pour la circulation moyenne, égal au courant en moyenne verticale. Dans des cas ou la réflexion des vagues est importante, la force de diffusion \mathbf{T}^{bscat} doit aussi être prise en compte car elle est exercée par le fond, et annule la partie correspondante de la divergence du flux de quantité de mouvement.

- On doit donc clairement séparer trois forces horizontales induites par les vagues,
- la force de pression induite par les vagues, qui est typiquement équilibrée par la décôte dans les cas conservatifs. Après intégration sur la vertical elle est égale à $-\rho_w \partial S^J / \partial x_\alpha$.
- la force de vortex qui est due au cisaillement de courant et à l'advection croisée de quantité de mouvement des vagues par le courant et du courant par les vagues
- la force exercée sur la circulation moyenne correspondant à la divergence de la pseudoquantité de mouvement (PQDM), corrigée des effets de réflexion des vagues par la topographie, et de la perte de PQDM par frottement sur le fond.

En effet, la fraction de la PQDM perdue par frottement sur le fond n'est que temporairement communiquée à la circulation, en contribuant au courant de ruissellement (Russel and Osorio 1958), avant de finir dans le fond via un cisaillement moyen (Longuet-Higgins 2005).

3. Equations en trois dimensions

Parce que la surface monte et descend, faire une moyenne de l'écoulement près de la surface n'a pas beaucoup de sens, sauf pour des mesures car on n'a pas toujours le choix. Du point de vue de la modélisation il est intéressant de résoudre les gradients en surface et donc de séparer clairement l'air et l'eau. Pour cela il faut tranformer au moins la coordonnée verticale.

Un jeu d'équation a été obtenu par Mellor (2003) à partir d'un simple changement de coordonnée verticale. La nouvelle coordonnée verticale ς est définie implicitement par,

$$z = s\left(\mathbf{x},\varsigma,t\right) = \widehat{\zeta} + \varsigma D + \widetilde{s},\tag{7.60}$$

de telle sorte que $z = \hat{\zeta} + \tilde{\zeta}$, la position instantanée de la surface libre, pour $\zeta = 0$, et z = -h, la position du fond, pour $\zeta = -1$. on rapelle que $D = h + \hat{\zeta}$.

Les équations du mouvement ont été ainsi transformées et moyennées sur la phase des vagues par Mellor (2003), pour des vagues monochromatiques. On peut appliquer le même principe à des vagues aléatoires (Ardhuin et coll. 2004) en prenant, à l'ordre 1 en pente des vagues,

$$\widetilde{s} = \sum_{\mathbf{k},s_1} \frac{\sinh(kz+kD)}{\sinh(kD)} Z_{1,\mathbf{k}}^{s_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_{1,\mathbf{k}}^{s_1}}.$$
(7.61)

Avec cette nouvelle coordonnée, les surfaces où ς est constant sont aussi des lignes de courant pour le mouvement des vagues. Il n'y a donc plus de vitesse verticale induite par les vagues dans ces coordonnées.

Malheureusement Mellor (2003) a négligé la modification des vitesses orbitales par la pente du fond et variations horizontales du champ de vagues. En effet, dans ces cas (1.30)–(1.33) ne sont pas solution exacte de l'équation de Laplace. Or ces effets contribuent des termes du même ordre que les termes retenus par Mellor (Ardhuin et coll. 2007b). Or, ces termes relativement complexes n'agissent que sur la pseudo-quantité de mouvement car ils représentent le déplacement vertical de PQDM U_s . Il est donc inutile d'introduire cette complexité si l'on s'intéresse à l'autre partie de la QDM, $\hat{u} = U - U_s$, la QDM du courant moyen.



FIG. 7.4 – Ecoulements Eulériens et Lagrangiens moyens pour des vagues au-dessus d'une marche lissée. (a) Perturbation de pression $(p-\overline{p})/(\rho_w g)$ à t = 0 telle que calculée avec le modèle NTUA-nl2 (Belibassakis and Athanassoulis 2002), qui résoud l'équation de Laplace à l'ordre 2 en pente des vagues, pour des vagues d'amplitude a = 0.12 m. (b) Courant Eulérien moyen $-\hat{u}$, et (c) composante horizontale de la pseudo-quantité de mouvement P_1 , qui est ici égale à la dérive de Stokes. Les flèches indiquent le sens de l'écoulement.

Il apparaît donc avantageux de déterminer des équations pour \hat{u} directement. Or ce travail a déjà été fait par Andrews et McIntyre (1978), il suffit donc de le transcrire en utilisant le mouvement connu des vagues (Ardhuin et coll. 2007b).

En définissant alors **X** comme la divergence du tenseur de Reynolds, on peut appliquer la moyenne GLM aux équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds (RANS). Les équations cidessus sont donc une approximation au second ordre en cambrure de la moyenne GLM des équations RANS, elles sont donc baptisées équations "glm2-RANS".

a. Equations glm2-RANS pour $\partial \hat{u}/\partial z = 0$

Afin de simplifier la discussion, nous utiliserons ici la forme des équations GLM donnée par Groeneweg (Groeneweg 1999, eq. 3.12) pour ρ_w constant, ce qui supprime, entre autres, les termes liés à la thermodynamique du fluide,

$$\overline{D}^{L}\left(\overline{u}_{i}^{L}-P_{i}\right)+\epsilon_{i3j}f_{3}\overline{u}_{j}^{L}+\frac{1}{\rho_{w}}\frac{\partial\overline{p}^{L}}{\partial x_{i}}-\overline{X}_{i}^{L}+gz=\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left[\frac{1}{2}\overline{u_{j}^{l}u_{j}^{l}}\right]+P_{j}\frac{\partial\overline{u}_{j}^{L}}{\partial x_{i}},$$
(7.62)

où la dérivée Langragienne D^L est une dérivée en suivant le fluide à la vitesse Langragienne moyenne \overline{u}^L .

$$P_i = A^{-x_i} \overline{\xi_{j,i}} \left(u_j^l + \epsilon_{jik} \Omega_j \xi_k \right) \simeq A^{-x_i} \overline{\xi_{j,i}} u_j^l$$
(7.63)

est la composante suivant *i* de la pseudo quantité de mouvement des vagues, soit, dans un langage plus familier, et de manière exacte aux ordres ε_1^2 et ε_2^0 , $P_i = U_{si}$. On négligera ici le cisaillement vertical du courant, qui est pris en compte par Ardhuin et al. (2007b). On peut alors utiliser les vitesses et déplacements données par la théorie d'Airy (chapitre I).

On remarque que les termes quadratiques dans (7.62) et (7.63) ne sont pas affectés par les corrections de premier ordre en ε_2 , car ces corrections sont en quadrature avec les termes d'ordre ε_2^0 . Il s'agit là d'un grande simplification par rapport au calcul à partir de la GLM alternative. Par contre, le cisaillement vertical du courant introduit des termes correctifs qui sont en phase avec les termes d'ordre ε_2^0 (MRL04). Le cisaillement vertical induit donc une modification de $\overline{u_j^l u_j^l}$ et **P** que nous négligerons dans un premier temps.

Nous allons calculer les différents termes induits par les vagues, d'abord pour une onde monochromatique dont la variance de l'élévation est var $\zeta = a^2/2$. On fera ensuite la superposition des composantes. Considérons d'abord le terme de pression. En utilisant le fait que $\overline{\widetilde{u}_{\alpha}\widetilde{u}_{\alpha} - \widetilde{w}^2} = \sigma^2 (F_{CS}F_{CS} - F_{SS}F_{SS})$ est indépendant de z à l'ordre ε_1^2 , on peut ajouter $0.5\partial(\widetilde{u}_{\alpha}\widetilde{u}_{\alpha} - \widetilde{w}\widetilde{w})/\partial z$ à l'équation sur la verticale (7.62) pour obtenir, toujours à l'ordre ε_1^2 ,

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} + \widehat{w} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} + P_3 \frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} + (\widehat{u}_{\beta} + P_{\beta}) \frac{\partial \widehat{w}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \overline{p}^L}{\partial z} + g$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\overline{\widetilde{u}_{\alpha} \widetilde{u}_{\alpha}} + \overline{\widetilde{w}^2} \right) / 2 + K_2 \right] + P_{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{u}_{\beta} + P_{\beta} \right) + P_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{u}_3 + P_3 \right), \quad (7.64)$$

qui se transforme en

$$\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{p}^L + \rho_w gz - \rho_w \frac{\sigma^2 E}{2} \left(F_{CS}^2 + F_{SS}^2\right) - \rho_w K_2\right] = -\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} - \widehat{w}\frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} - \left(\widehat{u}_\beta + P_\beta\right)\frac{\partial \widehat{w}}{\partial x_\beta} + P_\beta \frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{u}_\beta + P_\beta\right) + P_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{w} + P_3\right).$$
(7.65)

On ajoute alors le terme uniforme sur la verticale $-\sigma^2 E \left(F_{CC}^2 - F_{SS}^2\right)/2$, et en négligeant les trois premiers termes (hypothèse hydrostatique), l'intégration sur z donne

$$\frac{\overline{p(z)}^{L}}{\rho_{w}} = -g\left[(z - z_{s}) - kEF_{CC}F_{CS}\right] + K_{2} + K_{1} - \frac{gkE}{4\sinh(2kD)}$$
(7.66)

La force K_1 est définie par

$$K_{1} = -\int_{z}^{\overline{\zeta}^{L}} P_{\beta} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\widehat{u}_{\beta} + P_{\beta} \right) \mathrm{d}z' + \int_{z}^{\overline{\zeta}^{L}} P_{3} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(P_{\beta} \right) \mathrm{d}z', \tag{7.67}$$

où l'on a utilisé la relation, qui peut se prouver dans la limite des faibles cambrures,

$$P_3 = -P_{\alpha}(-h)\frac{\partial h}{\partial x_{\alpha}} - \int_{-h}^{z} \frac{\partial P_{\alpha}(z')}{\partial x_{\alpha}} dz'.$$
(7.68)

La constante d'intégration de la pression est donnée par la condition à la surface,

$$\overline{p(\zeta)}^{L} = -\rho_{w}g\left(\overline{\zeta}^{L} - z_{s} - kEF_{CC}F_{CS} - K_{2}(\overline{\zeta}^{L})/g\right) = \overline{p}_{a}.$$
(7.69)

L'équation (7.80) donne

$$z_s = \overline{\zeta} + \overline{p}_a / (\rho_w g) - K_2(\overline{(\zeta)}^L) / g \tag{7.70}$$

et (7.66) devient

$$\frac{\overline{p}^{L}}{\rho_{w}} = \frac{\overline{p}^{H}}{\rho_{w}} + gkEF_{CC}F_{CS} + K_{1} + K_{2} - K_{2}(\overline{\zeta}^{L}),$$
(7.71)

où p^H est la pression hydrostatique, $p^H = \rho_w g(\overline{\zeta} - z) + \overline{p}_a$.

Au moins sous les creux des vagues, la correction de Stokes pour la pression (7.18) donne la pression Eulérienne moyenne

$$\overline{p} = \overline{p}^L - \rho_w g k \operatorname{var}_{\zeta} \left(F_{CS} F_{CC} + F_{SS} F_{SC} \right).$$
(7.72)

Ainsi l'equation (7.66) donne une relation, valable sous les creux des vagues et à l'ordre ε_1^2 , entre la pression Eulérienne moyenne \overline{p} et la pression GLM \overline{p}^L ,

$$\overline{p} = \overline{p}^H - \rho_w g \operatorname{var}_{\zeta} k F_{SS} F_{SC}.$$
(7.73)

Par ailleurs, (7.19)–(7.25) donne, aux ordres ε_1^2 et ε_2 ,

$$\frac{1}{2} \left(u_j^l u_j^l \right) = \frac{1}{2} \left[F_{CS}^2 + F_{SS}^2 \right] \sigma^2 \operatorname{var}_{\zeta} = \frac{g k \operatorname{var}_{\zeta}}{2} \left[F_{CC} F_{CS} + F_{SC} F_{SS} \right].$$
(7.74)

En notant la vitesse quasi-Eulérienne $\widehat{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{U}}^L - \mathbf{P}$, l'équation (7.62) devient, pour la vitesse horizontale,

$$\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial t} + \left(\widehat{u}_{\beta} + U_{s\beta}\right)\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \widehat{w}\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial z} + \epsilon_{\alpha3\beta}f_{3}\overline{u}_{\alpha}^{L} + \frac{1}{\rho_{w}}\frac{\partial \overline{p}^{H}}{\partial x_{\alpha}} \simeq -\frac{\partial S^{J}}{\partial x_{\alpha}} + U_{s\beta}\frac{\partial \widehat{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - P_{3}\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial z}\overline{X}_{\alpha}^{L}, \quad (7.75)$$

où S^J est défini par (7.54).

L'équation (7.75) peut se transformer en

$$\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial t} + \widehat{u}_{\beta} \frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \widehat{w} \frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial z} + \epsilon_{\alpha 3\beta} \left[f_3 \widehat{u}_{\alpha} + (f_3 + \omega_3) U_{s\beta} \right] + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \overline{p}^H}{\partial x_{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{S^J}{\rho_w D} - P_3 \frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial z} + \overline{X}_{\alpha}^L.$$
(7.76)

Un paramétrage possible de la source de quantité de mouvement provenant des mouvements diabatiques est

$$\overline{X}_{\alpha}^{L} = \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{z} \frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial z} \right) - T_{\alpha}^{\rm wc} - T^{\rm turb},$$
(7.77)

avec $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Reynolds turbulent horizontal, tandis que les deux derniers termes correspondent au flux de quantité de mouvement des vagues vers la circulation moyenne.

b. Transformation de coordonnée implicite associée au GLM

La moyenne des positions des particule aboutit à donner plus de poids là ou les particules passent plus de temps (par exemple sur les crêtes des vagues), malgré un déplacement moyen nul pour chaque particule. Ainsi le domaine de validité de l'équation (7.76) est $-h < z < \overline{\zeta}^L$, au lieu de $-h < z < \overline{\zeta}$. Il faut donc faire attention en transformant les coordonnées, par exemple pour utiliser une coordonnée ς . On fait ici la démonstration pour une onde monochromatique dont la variance d'élévation de la surface est var $_{\zeta}$. Cette démonstration ne faisant intervenir que des quantités d'ordre 2 en ε_1 , proportionnelles au spectre de variance de l'élévation de surface $E(\mathbf{k})$, elle se transpose à des vagues alaétoires par simple sommation sur les composantes. Le Jacobien J de la transformation entre coordonnées Eulériennes et GLM est égal à 1 plus une quantité J_2 qui est de second ordre en ε_1 ,

$$J = 1 + J_2 + O(\varepsilon_1^3) \tag{7.78}$$

$$J_2 = -\frac{kA^{3D}}{\sigma} = -k^2 \operatorname{var}_{\zeta} \frac{\cosh\left[2k(z+h)\right]}{\sinh^2(kD)},$$
(7.79)

Parce que le GLM n'induit pas d'étirement des coordonnées horizontales, une distance verticale dz' = Jdz en GLM correspond à une distance Cartésienne dz. Puisque J < 1, alors dz' > dz. Ainsi, la position verticale en GLM est partout plus grande que la moyenne Eulérienne de la position des mêmes particules (voir aussi la discussion de cet effet par McIntyre 1988). Cela peut s'interpréter par le fait que les particules sont plus nombreuses dans les crêtes que dans les creux (figure 7.1). Au second ordre en ε_1 , la position GLM moyenne de la surface est donnée par (7.18)

$$\overline{\zeta}^{L} = \overline{\zeta} + \overline{\zeta}^{S} = \overline{\zeta} + \xi_{\alpha}(z=0)\frac{\partial\zeta}{\partial x_{\alpha}} = \overline{\zeta} + \operatorname{var}_{\zeta}\frac{k}{\tanh kD},$$
(7.80)

En intégrant sur la profondeur, on définit

$$s_2^G(x, z, t) = -\int_{-h}^{z} J_2(z') dz' = k \operatorname{var}_{\zeta} \frac{\sinh\left[2k(z+h)\right]}{2\sinh^2(kD)}.$$
(7.81)

et on a bien

$$\int_{-h}^{\overline{\zeta}^{L}} J dz = \overline{\zeta}^{L} + D - s_{2}^{G}(0) = D.$$
(7.82)

Par analogie avec (7.60) on définit implicitement une nouvelle transformation de coordonnée verticale

$$s_2 = \varsigma D + s_2^G + \overline{\zeta}. \tag{7.83}$$

Tout champ scalaire $\phi(x_1, x_2, z, t)$ se transforme en $\phi^*(x_1^*, x_2^*, \varsigma, t^*)$, avec les relations

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial t^{\star}} - \frac{s_{2,t}}{s_{2,\varsigma}} \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial \varsigma}$$
(7.84)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial x_{\alpha}^{\star}} - \frac{s_{2,\alpha}}{s_{2,\varsigma}} \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial \varsigma}$$
(7.85)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{s_{2,\varsigma}} \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial \varsigma}$$
(7.86)

avec $s_{2,t}$, $s_{2,\varsigma}$ et $s_{2,\alpha}$ les dérivés partielles de s_2 par rapport à t, ς et x_{α} , respectivement. Nous avons par ailleurs l'identité remarquable

$$s_{2,\varsigma}J = D\left[1 + O(\varepsilon_1^3)\right]. \tag{7.87}$$

$$\frac{\partial \left(\rho_w J\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho_w J \overline{u}_\alpha^L\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \left(\rho_w J \overline{w}^L\right)}{\partial z} = 0$$
(7.88)

ce qui donne, dans les nouvelles coordonnées,

$$\frac{\partial \left(\rho_w \widehat{\zeta}\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(D\rho_w U_\alpha\right)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \left(\rho_w W\right)}{\partial \zeta} = 0, \tag{7.89}$$

avec la vitesse "verticale",

$$W = J \left[\overline{w}^L - \overline{u}^L_\alpha s_{2,\alpha} - s_{2,t} \right], \tag{7.90}$$

qui est définie exactement par le transport Lagrangien à travers les surfaces iso- $\varsigma.$

La multiplication de (7.76) par $\rho_w s_{2,\varsigma} J$ donne, sous une de ses formes,

$$\rho_{w}D\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial t} + \rho_{w}D\widehat{u}_{\beta}\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \rho_{w}\widehat{w}\frac{\partial \widehat{u}_{\alpha}}{\partial \varsigma} + \rho_{w}D\epsilon_{\alpha\beta\beta}\left[f_{3}\widehat{u}_{\alpha} + (f_{3} + \omega_{3})U_{s\beta}\right] \\ + D\frac{\partial \overline{p}^{H}}{\partial x_{\alpha}} - \rho_{w}gDJs_{2,\alpha} = -\frac{\partial S^{J}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{JS^{J}}{D}\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(s_{2,\alpha}\right) + \overline{X}_{\alpha}^{L},$$

avec

$$\widehat{w} = J \left[\overline{w}^L - \widehat{u}_\alpha s_{2,\alpha} + s_{2,t} \right] = W + J \widehat{U}_{s\alpha} s_{2,\alpha}, \tag{7.91}$$

à travers les surfaces iso- ς .

la vitesse quasi-Eulérienne à travers les surfaces iso- ς .

L'équation (7.76) est valable de z = -h à $z = \overline{\zeta}^L$ ce qui couvre toute la colonne d'eau en GLM.

c. Comparaison avec les équations 2D

L'équation correspondant à la quantité de mouvement intégrée sur la verticale est obtenue en multipliant (7.76) par le Jacobien J avant d'intégrer de z = -h à $z = \overline{\zeta}^L$. Pour les termes qui sont déjà d'ordre ε_1^2 , comme la force de vortex, cela revient, à l'ordre ε_1^2 , à intégrer simplement (7.76) de -h à $z = \overline{\zeta}$. Enfin, pour les termes uniformes sur la verticale (e.g. $\partial p^H / \partial x_{\alpha} = \partial \overline{\zeta} / \partial x_{\alpha}$), l'introduction du Jacobien compense exactement la continuation de l'intégrale entre $\overline{\zeta}$ et $\overline{\zeta}^L$. Ainsi

$$-\int_{-h}^{\overline{\zeta}^{L}} J \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{S^{J}}{D}\right) dz = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\rho_{w} g E \left(C_{g}/C - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{S^{J}}{D} \left(\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial h}{\partial x_{\alpha}} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\rho_{w} g E \left(C_{g}/C - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{S^{J}}{D} \frac{\partial D}{\partial x_{\alpha}},$$
(7.92)

ce qui correspond au deuxième terme du membre de droite de (7.59). L'intégration verticale des équations 3D donne donc les équations 2D connues.

Le terme adiabatique S^J dans l'équation du mouvement moyen (7.76) est uniforme sur la verticale.

A première vue, tout cela peut paraître très compliqué. Toutefois, on a maintenant explicité la contribution des vagues qui se cachait dans les mystérieux tenseurs de Reynolds : la boîte noire des tenseurs de Reynolds est devenue un peu plus grise, et c'est, pour certains, moins joli. Mais on s'est donné des outils qui sont parmi les plus simples pour manipuler la vitesse juste en surface, et nous en verrons une application assez simple. Dans leur pleine généralité ces équations devraient permettre des simulations 3D réalistes de la zone de déferlement où la circulation est très sensible aux profils des tensions de dissipation $T_{\alpha}^{wc} + T^{turb}$. Cet aspect sera brièvement abordé au chapitre suivant. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe près du fond.

D. Couche limite de fond

1. Ruisselement

Le déphasage entre la vitesse dans la couche limite et au dessus a des conséquences assez inattendue. Un calcul de la vitesse verticale w, (nulle au fond mais non-nulle dans la couche limite), montre aussi que w est déphasé, en opposition de phase avec l'élévation de la surface. Il en résulte que le produit moyen \overline{uw} est négatif en moyenne : il y a un flux de quantité de mouvement vers le fond. Or ce flux est généralement divergent : il apparait un courant, dans la direction de propagation des vagues. Pour une viscosité constante, Longuet-Higgins (voir Russel et Osorio 1958) a montré que le courant de dérive près du fond (y compris la dérive de Stokes qui est modifée dans la couche limite) est égal à $2.5\overline{u_{\infty}^2}/C$ au sommet de la couche limite, soit 2.5 fois la valeur de la dérive de Stokes prévue avec une condition de glissement libre. C'est le phénomène de ruissellement, observé pour la première fois par Caligny (1878). En sommet de couche limite l'augmentation de U est seulement le fait du courant Eulérien \hat{u} .

Pour des profils de K_z réalistes et sur un fond ridé, il semble que la valeur maximale du courant de dérive près du fond soit effectivement de l'ordre de 2.5 fois $U_s(z = -H)$ (Marin 2004). Ce ruissellement est très important pour le transport des sédiments par charriage sur le fond.

2. Raccordement avec la couche limite permanente

L'équipe du professeur Madsen au MIT a particulièrement étudié les interactions entre la couche limite sous les vagues et la couche limite permanente liée au courant. Ils ont en particulier montré qu'on pouvait décrire la rugosité pour des vagues aléatoires par un seul paramètre (voir aussi Zou 2004).

Dans la couche limite de fond on distingue la couche limite des vagues $z + H < \delta_{cw}$, où les deux tensions $\tau_w = \rho_w u_{\star w}^2$ et $\tau_c = \rho_w u_{\star c}^2$ s'additionnent pour donner $\tau_{wc} = \rho_w u_{\star wc}^2$, le flux net de quantité de mouvement vers le fond, et la couche limite du courant seul, $z + H > \delta_{cw}$ ou $\tau = \rho_w \overline{u'w'} = \tau_c$ seulement.

En suivant le raisonnement de Grant et Madsen (1979), le courant Eulérien vérifie,

$$\kappa |u_{\star c}| z \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z} = u_{\star c}^2 \quad \text{pour} \quad (z+H) > \delta_c w,$$
(7.93)

ce qui exprime que le courant Eulérien est mélangé par des tourbillons dont l'échelle est donnée par la longueur de mélange de Prantl. Mais, près du fond, Grant et Madsen remarquent que la turbulence est engendrée par les vagues et leur séparation du mouvement en vagues + courant donne, pour le courant,

$$\kappa |u_{\star c}| z \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = u_{\star cw}^2 \quad \text{pour} \quad (z+H) < \delta_c w.$$
(7.94)

Cette dernière équation dit que le courant est mélangé par la toute la turbulence présente près du fond, due à la fois aux vagues et au courant.

On peut résoudre séparément chaque équation pour trouver que,

$$\widehat{u} = \frac{u_{\star c}}{\kappa} \ln \frac{z}{z_{0c}} u_{\star c}^2 \quad \text{pour} \quad (z+H) > \delta_c w, \tag{7.95}$$

et,

$$\widehat{u} = \frac{u_{\star c}}{\kappa} \frac{u_{\star c}}{u_{\star cw}} \ln \frac{z}{z_1 c} u_{\star c}^2 \quad \text{pour} \quad (z+H) < \delta_c w.$$
(7.96)

Par continuité de \hat{u} on trouve

$$z_{0c} = z_{0wc}^{\epsilon} \delta_{wc}^{1-\epsilon} \tag{7.97}$$

avec z_{0wc} la rugosité pour les vagues, et $\epsilon = u_{\star c}/u_{\star m}$ où $u_{\star m}$ est la valeur maximale de la vitesse de frottement combinée définie par,

$$u_{\star m}^2 = u_{\star wm}^2 + u_{\star c}^2 \tag{7.98}$$

avec $u_{\star wm} = \max(u_{\star w})$ pour des vagues monochromatiques. Pour des vagues aléatoires, il est probable qu'on puisse utiliser la valeur r.m.s.

Cette équation pour z_{0c} n'est pas tout a fait exacte car dans (7.94) il manque la source de quantité de mouvement qui vient de la dissipation des vagues et qui contribue au ruissellement. Mathisen et Madsen (1996) ont donc "bricolé" une rigosité équivalente

$$z_{0a} = z_{0c} \exp\left[\kappa \widehat{u}(\delta_{wc}/u_{\star c})\right]. \tag{7.99}$$

Cet ajustement permet de retrouver une vitesse moyenne \hat{u} à la profondeur $-H + \delta_{wc}$. Cela peut faire passer le z_0 utile pour le courant de 1 à 3 cm dans le cas des expériences en laboratoire de Mathisen et Madsen (1996) ... très bien mais, comment calculer \hat{u} ? C'est tout l'enjeu de certains travaux récents (dont Davies et Villaret 1999, Marin 2004).

Il n'y a pas encore de réponse à cette question, qui est pourtant fondamentale pour déterminer le frottement sur le fond (et donc les courants de marée au fond de la Baie du Mont St Michel par exemple). On peut toutefois imaginer que les équations générales du type de (7.76) seront utiles.

E. La couche mélangée océanique

1. Mélange et dérive

Nous allons justement voir l'application de (7.76) à un autre problème très important : la dérive à la surface de l'océan. Nous considérons désormais un champ de vagues uniforme. On recherche alors une solution uniforme sur l'horizontale, ce qui supprime les gradients horizontaux dans (7.76) et la vitesse verticale, pour donner

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} = -f \mathbf{e}_z \times (\widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_s) + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial z} \right] - \mathbf{T}^{\text{wc}} - \mathbf{T}^{\text{turb}}$$
(7.100)

Tout le problème se reporte alors sur le paramétrage du coefficient de mélange vertical K_z et les profils verticaux de \mathbf{T}^{wc} et \mathbf{T}^{turb} . Le courant Eulérien moyen $\hat{\mathbf{u}}$ est calculé en résolvant (7.100) avec une clôture turbulente adéquate permettant de déterminer K_z . On utilisera le schéma dit de Mellor-Yamada de niveau 2.5 (Mellor et Yamada 1982),

$$K_z = qS_M l, (7.101)$$

avec l'ECT $q^2 = \overline{u'_i u'_i}$, $S_M = 0.39$ une constante et l une longueur de mélange qui sera prescrite comme suit,

$$l = \max\{-\kappa D\varsigma, \kappa z_{0-}\} \quad \text{pour} \quad -\frac{1}{2} < \varsigma < 0$$

$$l = \max\{\kappa D(1+\varsigma), \kappa z_{0a''}\} \quad \text{pour} \quad \left(-1+\frac{\delta}{D}\right) < \varsigma < -\frac{1}{2}$$
(7.102)

La longueur de rugosité z_{0-} fait que K_z est non-nul en surface, ce qui correspond à toutes les observations océaniques (*e.g.* Kitaigorodskii 1994, Thorpe *et al.* 2003) qui suggèrent par ailleurs une valeur de z_0 importante, de l'ordre de H_s , la hauteur significative des vagues (e.g. Mellor et Blumberg 2004), soit quelques mètres en général. Cependant, certaines paramétrisations continuent à utiliser $K_z = 0$ en surface (e.g. Large *et al.* 1994). On utilise aussi les condition suivantes pour q,

$$lqS_q \frac{\partial q^2}{\partial z} = \alpha \frac{\rho_a^0}{\rho_w^0} u_\star^3 \quad \dot{a} \quad \varsigma = 0,$$
(7.103)

$$lqS_q \frac{\partial q^2}{\partial z} = 0 \quad \dot{a} \quad \varsigma = -1, \tag{7.104}$$

avec $S_q = 0.2$, et lqS_q le coefficient d'échange turbulent pour q^2 , et α un coefficient qui varie avec l'état de la mer (Terray *et al.* 2000, Mellor et Blumberg 2004) mais qui ici est pris constant, $\alpha = 100$, ce qui est un ordre de grandeur assez général.

Enfin, on considère ici un état de mer pleinement développé et on simplifie la paramétrisation en supposant que \mathbf{T}^{wc} et \mathbf{T}^{turb} sont concentrés à la surface si bien qu'ils n'apparaissent plus dans (7.100) mais s'ajoutent dans la condition de continuité des contraintes qui s'écrit, en négligeant la dissipation des vagues par la viscosité,

$$\tau_a - \tau_\alpha^{\rm wc} - \tau_\alpha^{\rm turb} = \tau_\alpha^{\rm in} + \rho_w K_z \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial \varsigma} \quad \dot{a} \quad \varsigma = -\frac{\delta_s}{D}, \tag{7.105}$$

et donc, classiquement,

$$\tau_a = \rho_w u_\star \mathbf{u}_\star = \rho_w K_z \frac{\partial \widehat{u}_\alpha}{\partial \varsigma} \quad \dot{\mathbf{a}} \quad \varsigma = 0, \tag{7.106}$$

où u_{\star} est la vitesse de frottement du vent. Cette simplification, qui transforme \mathbf{T}^{wc} et \mathbf{T}^{turb} en τ_{α}^{wc} et τ_{α}^{turb} , ne change pas beaucoup les résultats pourvu que le mélange en surface soit fort, ce qui se caractérise par z_{0-} plus grand que l'échelle de décroissance verticale de \mathbf{T}^{wc} et \mathbf{T}^{turb} .

Or, classiquement, on a longtemps utilisé de très faibles valeurs du mélange en surface et donc ici de z_{0-} (figure 2a), ce qui permettait d'obtenir des vitesses importantes en surface pourvu que la résolution du modèle numérique soit très fine près de la surface. Ces vitesses étaient compatibles avec les observations de dérive en surface, de l'ordre de 3% de la vitesse du vent (Huang 1979), mais Agrawal *et al.* (1992) se sont rendu compte que la dissipation d'energie cinétique en surface était sous-estimé d'au moins un ordre de grandeur, le mélange était donc beaucoup plus intense que ce que l'on pensait jusque là. Récemment, Mellor et Blumberg (2004) ont montré qu'un mélange réaliste en surface (avec $z_0 = 0.8H_s$) permet de mieux représenter les variations de la température de surface à la station Papa dans le Golfe d'Alaska, dont les mesures servent de référence pour ce type de problème. Ce faisant, Mellor et Blumberg (2004) ont considérablement réduit la vitesse en surface (avec un profil proche de la vitesse Eulérienne en figure 2b).



FIG. 7.5 – Profils stationnaires de vitesse pour un vent de 10 m/s (vent à 10 m)

(a) Profil issu du modèle Eulérien "classique" et (b) profils issus du modèle plus réaliste présenté ici. On remarque que l'erreur sur la vitesse de dérive due à la faible valeur de z_0 dans le modèle classique est compensée par l'absence de la prise en compte de la dérive de Stokes. La vitesse q est la racine carrée de l'Energie Cinétique Turbulente (ECT), seul le flux réaliste d'ECT (utilisé à droite) permet d'obtenir un profil réaliste de q. Afin de faciliter l'interprétation la profondeur de rugosité, $z = z_0$, est aussi indiquée (figure réalisée par Nicolas Rascle).



FIG. 7.6 – Vitesses quasi-Eulériennes près de la surface

Les mesures de vitesses par deux types de courantomètres (SASS et VMCM) ont été corrigées du mouvement des vagues. $u_{\star w} = (\rho_a/\rho_w)^{1/2} u_{\star}$ est la vitesse de friction dans l'eau (données de Santala et Terray, figure tirée de Terray et coll. 2000). La différence de vitesse entre la surface et la thermocline est d'environ 0.5% de la vitesse du vent U_{10} .



FIG. 7.7 – Circulations de Langmuir (dessin de J. A. Smith)

Il existe peu de mesures de profils de vitesse Eulériens ou Lagrangiens près de la surface. Les observations de Santala et Terray (1992) indiquent que le courant Eulérien induit par le vent ne dépasse pas 0.5% de la vitesse du vent en surface en moyenne (figure 7.6).

Le modèle proposé ici rajoute la dérive de Stokes à la vitesse Eulérienne, permet donc de satisfaire à peu près à l'ensemble des observations de vitesse de dérive et de mélange (Rascle, Ardhuin et Terray 2006). En particulier il permet d'obtenir à la fois un cisaillement assez fort (essentiellement lié à la dérive de Stokes) et un fort mélange (causé par le déferlement). Il reste a expliquer une différence entre la dérive en surface du modèle et les dérive constatées qui sont supérieures de 1 à 1.5% de la vitesse du vent. Un des phénomènes en cause est la corrélation entre convergence et vitesse de dérive liée aux circulations de Langmuir.

2. Circulations de Langmuir

Ce défaut du modèle n'est pas très étonnant quand on réalise que l'océan superficiel n'est pas homogène. De nombreuses observations, à commencer par celles de Langmuir (1938) on fait état d'un alignement préférentiel de débris et d'écume à la surface, dans le sens du vent (figure 7.7). Il est apparu que ces lignes sont liées à des structures tourbillonaires alignées avec le vent et dont la présence est liée à une interaction entre les vagues et le vent. Enfin dans les années 1990, plusieurs campagnes océanographiques (SWAPP, MBLEX ...) ont indiqué que ces structures étaient responsable de l'essentiel du brassage dans la couche de mélange, y compris par faible profondeur (Marmorino et coll. 2005). Bien que certains détails de ces circulations ne sont pas encore expliqués, le mécanisme essentiel à leur formation est une instabilité combinant le cisaillement vertical du courant moyen et l'influence des vagues par la force de vortex.

3. Etat de la mer et flux océan-atmosphère

Si l'effet du flux d'énergie cinétique en surface est encore inconnu à l'échelle océanique (modification possible des upwellings et autres flux, voir Janssen et al. 2004), on connait assez bien les principaux effets de l'état de la mer sur la circulation océanique (Janssen 2004). En particulier, il est bien établi que la tension de vent dépend fortement de l'âge des vagues : pour une vitesse de vent donnée la tension sera typiquement plus forte en mer du Nord qu'au milieu de l'Atlantique où la mer est plus développée.



FIG. 7.8 – Effet de l'état de la mer sur la tension de vent A gauche : mesures du coefficient de traînée C_{10N} , souvent noté C_d , $(\tau = \rho_a C_{10N} U_{10N}^2)$, lors de la campagne FETCH en Méditerranée, et à droite, variation de la longueur de rugosité z_0 , normalisée par $\sigma = H_s/2$ pour plusieurs campagnes de mesures (figures tirées de Drennan et coll. 2003).

VIII. VAGUES ET CIRCULATION LITTORALE

A. Déferlement bathymétrique

Nous avons vu que très près des côtes, la hauteur des vagues H_s augmente à cause de la diminution de la profondeur et donc de la vitesse de groupe C_g , en particulier pour une incidence normale $\theta = 0$. Pour une incidence oblique, la réfraction tend à réduire cet effet car le flux d'énergie vers la plage est constant à $C_g H_s^2 \cos \theta/4$ et $\cos \theta$ augmente (pour une bathymétrie uniforme le long de la côte, $\sin \theta/C$ est conservé par application de la loi de Snel). Or plus les vagues sont hautes, plus elles sont pentues et la vitesse des particules d'eau augmente. Pour une vague de Stokes, la pente maximale des vagues H_v/L est environ 1/7, au-delà de cette valeur, l'accélération verticale dépasse la gravité g et la vague est instable. La vitesse des particules d'eau sur les crêtes peut aussi dépasser la vitesse de phase des vagues, ce qui provoque aussi le déferlement. Par la théorie linéaire, la hauteur H_v d'une houle monchromatique est limité par la profondeur $H : H_v < H/2$. En pratique on mesure que le déferlement d'une vague régulière se produit lorsque sa hauteur dépasse γD avec γ entre 0,4 et 1 suivant les conditions.

Le déferiement dépend aussi de la pente du fond : plus elle est forte et plus les vagues seront réfléchies et moins le déferiement sera important. Pour des vagues régulières, la réflexion partielle à la côte forme une onde sationnaire. Carrier et Greenspan (1958) ont montré que si la pente du fond était assez abrupte alors la pente de la surface devenait verticale et il y avait donc déferiement. En représentant l'amplification locale des vagues par rapport à leur amplitude au large, cela donne un critère du type $\varepsilon_0 = 1$ pour le déferiement avec $\varepsilon_0 = (2\pi)^{1/2} \omega^2 a_0 / (g \tan^{5/2} \beta)$ où a_0 est l'amplitude des vagues en eau profonde (pour kD >> 1) et $\tan \beta$ est la pente du fond. En eau profonde $\omega^2 = gk$ et donc ε_w est le rapport entre la pentes des vagues au large ka_0 et une fonction de la pente du fond $\tan \beta$. On peut aussi ignorer l'amplification des vagues depuis le large pour obtenir le nombre d'Irribaren (aussi appelé paramètre de déferiement, 'surf parameter'),

$$\xi_0 = \frac{\tan\beta}{\left(2\pi H_0 T^2\right)^{1/2}} \tag{8.1}$$

qui permet de classifier le déferlement en quatre types : glissant ('spilling' pour $\xi_0 < 0.4$), plongeant ('plunging' pour $0.4 < \xi_0 < 2$), écroulant ('collapsing' pour $\xi_0 > 2$).

Il apparaît donc que la hauteur des vagues individuelles est très importante, or le spectre que nous avons utilisé jusqu'ici au large ne nous donne qu'une information statistique sur la hauteur des vagues. Pour un processus aléatoire dont la bande de fréquence est étroite la distribution des maxima (la hauteur individuelle des vagues dans notre cas) suit une loi de Rayleigh, et la densité de probabilité pour une vague d'avoir la hauteur H_v est donnée par

$$P(H_v) = \frac{2H_v}{H_{\rm rms}^2} e^{-(H_v/H_{\rm rms})^2}$$
(8.2)

On détermine ainsi que la moyenne du tiers des vagues les plus hautes $H_{1/3}$ est égale à la hauteur significative H_s et que $H_{1/3} = 2^{1/2} H_{\rm rms}$. On trouve aussi que $H_{1/10} = 1, 8H_{\rm rms}$ et ainsi de suite. Par contre pour des estimations de hauteurs avec de grandes périodes de retour (20 ou 100 ans, typiquement la durée de vie pour la conception d'une installation), on utilise une loi de Rayleigh modifée.

Pour estimer l'évolution de la hauteur des vagues sur un plage, on peut supposer que la bathymétrie est invariante le long de la plage et utiliser la conservation du flux d'énergie vers la plage $C_g E \cos \theta$. Ce flux est modifié par la dissipation ε due au déferlement. Approfondissant le travail de Battjes et Janssen (1978), Thornton et Guza ont estimé une probabilité qu'une vague de hauteur H_v soit en train de déferler, et utilisé la dissipation d'énergie ε dans un ressaut hydraulique :

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\rho g \frac{(D_2 - D_1)^3}{D_1 D_2} Q$$
(8.3)

où D_1 et D_2 sont les profondeurs de part et d'autre du ressaut et Q est la vitesse moyenne au travers du ressaut. En prenant $D_2 - D_1 = BH_v$, avec $B \approx 1$ un coefficient empirique, $D_1D_2 = D^2$, et Q = CD/L (L est la longueur d'onde locale des vagues), on obtient la dissipation pour les vagues déferlantes de



FIG. 8.1 – Transformation des vagues par défer
lement Résultats du modèle de Thornton et Guza (1986) pour la hauteur des vagues d'une houle de période T = 12 s, et le courant littoral sur une plage schématique (pente moyenne 4%), en prenant en compte la réfraction. La côte est à droite et le large à gauche. Le courant de dérive littoral est aussi indiqué : voir ci-dessous pour une explication.

hauteur H_v . Thornton et Guza intègrent alors cette dissipation pour la distribution de H_v et obtiennent la dissipation totale moyenne

$$\varepsilon = \frac{3}{16} \pi^{1/2} \rho g \frac{B^3}{\gamma^4 D^5} f_p H_{\rm rms}^7, \tag{8.4}$$

où f_p est la fréquence du pic spectral des vagues.

B. Forçage de la circulation par les vagues

Partis du grand large nous avons donc vu comment les vagues sont générées, se propagent, et finissent par se dissiper sur la plage, parfois 10000 kilomètres plus loin (Snodgrass et coll., 1966). On a pu voir que les vagues influaient assez peu avec les courants au large, malgré une modification de la turbulence en surface, et de la friction au fond, ce qui a permis aux océanographe des grands fonds de les ignorer sans trop de problèmes, en tout cas jusqu'à aujourd'hui, sauf pour l'altimétrie et toutes les formes de télédétection. Par contre sur la plage les vagues sont générallement le forçage hydrodynamique le plus important. En particulier les vagues transportent une quantité de mouvement qui, lorsqu'elle est dissipée force des courants intenses et des variations du niveau moyen. Dans ce chapitre un utilise l'approche traditionnelle de Longuet-Higgins (1970) et Phillips (1977). La théorie générale vient d'être reformulée par plusieurs auteurs (McWilliams et coll. 2004, Newberger et coll. 2005), et devrait modifier légèrement la compréhension de la circulation littorale. Enfin, les effets de variabilité le long de la plage (Peregrine 1999, Bühler et Jacobson 2001) devraient permettre une meilleure compréhension de la dynamique du courant littoral.

C. Décôte et surcôte

1. Equations pour l'écoulement moyen

Nous avons vu au chapitre VII que par rapport à une situation sans vagues, la présence des vagues induisait deux termes supplémentaires dans les équations intégrées de conservation de la quantité de mouvement : le gradient T de la pression hydrostatique due à l'élévation moyenne, et la divergence de S, tenseur des contraintes de radiation. En définissant la profondeur moyenne $D = \langle \zeta \rangle + h$ et le flux de masse total (dû aux vagues et au courant moyen) comme $\widetilde{\mathbf{M}} = \rho \mathbf{U}D + \mathbf{M}$, la vitesse moyenne du transport de masse est $\widetilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{M}}/(\rho D) = \mathbf{U} + \mathbf{M}/(\rho D)$. La moyenne de l'intégrale verticale de la conservation de la masse donne

$$\frac{\partial \widetilde{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{M}_y}{\partial y} = 0. \tag{8.5}$$

On peut montrer directement (en moyennant les équations du mouvement intégrées sur la verticale, voir par exemple Phillips, 1977), que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\widetilde{U}_x \widetilde{M}_x + S_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\widetilde{U}_x \widetilde{M}_y + S_{yx} \right) = -\rho g D \partial \frac{\langle \zeta \rangle}{\partial x} + \tau_{x,s} + \tau_{x,f}$$
(8.6)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\widetilde{U}_y \widetilde{M}_x + S_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\widetilde{U}_y \widetilde{M}_y + S_{yy} \right) = -\rho g D \partial \frac{\langle \zeta \rangle}{\partial y} + \tau_{y,s} + \tau_{y,f}$$
(8.7)

où $(\tau_{x,s}, \tau_{y,s})$ et $(\tau_{x,f}, \tau_{y,f})$ sont les tensions en surface et au fond respectivement. La divergence du flux de quantité de mouvement est donc équilibrée par la pression hydrostatique, le vent et la friction au fond.

2. Application aux variations du niveau moyen

Soit une plage et un champ de vagues uniforme dans la direction (Oy), toutes les dérivées par rapport à y deviennent nulles. En particulier, la conservation de la masse devient

$$\frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial x} = 0, \tag{8.8}$$

donc M_x est constant, en supposant la plage imperméable. Au passage, on note que le courant moyen doit équilibrer le flux de masse dû aux vagues qui est concentré près de la surface. Le courant doit donc s'inverser en profondeur : c'est le courant de retour ('undertow', le 'crapaud du ressac', 'under toad' dans la version anglaise, dans *Le monde selon Garp* de John Irving).

L'équilibre de la quantité de mouvement sur l'axe des x donne

$$\frac{\partial}{\partial x}S_{xx} = -\rho g D \partial \frac{\langle \zeta \rangle}{\partial x} + \tau_{x,s} + \tau_{x,f}$$
(8.9)

Prenons des vagues d'incidence normale $\theta = 0$ et supposons que $\tau_{x,s} = \tau_{x,f} = 0$, alors on obtient la pente moyenne de la surface

$$\frac{\partial \langle \zeta \rangle}{\partial x} = -\frac{1}{\rho g D} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_g E}{C} \left(2 - \frac{\sinh 2kD}{\sinh 2kD + 2kD} \right) \right]$$
(8.10)

Sans résoudre cette équation différentielle, on remarque que lorsque les vagues ne déferient pas, $C_g E$ est conservé et C diminue vers la plage donc S_{xx} augmente vers la plage si la profondeur D diminue régulièrement et $\partial \langle \zeta \rangle / \partial x$ est négatif : le niveau moyen s'abaisse vers la plage ('set-down').

En supposant $\langle \zeta \rangle \ll h$, on peut remplacer D par h et on trouve (en exercice... un truc : comme la fréquence est conservée, en différenciant $\omega^2 = gk \tanh kD$ on a une relation entre $\partial k/\partial x$ et $\partial D/\partial x$) :

$$\langle \zeta \rangle = -\frac{a^2 k}{2\sinh(2kD)} \tag{8.11}$$

où a est l'amplitude locale des vagues. On peut montrer que cette relation est indépendante de la direction des vagues au large, en appliquant la loi de Snel.

Juste au point de défer
lement, de profondeur h_d , on peut supposer que $kD \ll 1$ et $H_v = 2a = \gamma h_d$ et donc

$$\langle \zeta \rangle = -\frac{\gamma}{16} H_v. \tag{8.12}$$

En reprenant les valeurs de la figure 8.1 pour une houle de période T = 12s, et d'indidence $\theta = 20^{\circ}$, la hauteur maximale avant déferlement était 2,3 m, ce qui donne, avec $\gamma = 0,4$ une décote de 6 cm.

Dans la zone de défer
lement, le flux d'énergie n'est plus conservé et la hauteur des vagues est limitée par la profondeur, en gros $2a = H_v = \gamma D$ et donc

$$E = \rho g \gamma^2 D^2 / 8. \tag{8.13}$$

On peut aussi faire l'approximation de l'eau peu profonde $kD \ll 1$ et donc $C_g = (gD)^{1/2}$ ce qui donne

$$S_{xx} = \frac{3}{16} \rho g \gamma^2 \left(h + \langle \zeta \rangle \right)^2 \tag{8.14}$$

qui équilibre le gradient de pression hydrostatique

$$\frac{3}{16}\gamma^2 2\left(h + \langle \zeta \rangle\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \langle \zeta \rangle\right) = -\left(h + \langle \zeta \rangle\right) \frac{\partial \langle \zeta \rangle}{\partial x} \tag{8.15}$$

qui se simplifie en

$$\frac{\partial \langle \zeta \rangle}{\partial x} = -B \frac{\partial h}{\partial x} \tag{8.16}$$

avec

$$B = \left[1 + \frac{1}{3\gamma^2/8}\right]^{-1}$$
(8.17)

et s'intègre en

$$\langle \zeta \rangle = -Bh + A_0. \tag{8.18}$$

La constante A_0 est donnée par la condition au point de déferlement, de profondeur h_d , et

$$\langle \zeta \rangle = -B \left(h_d - h \right) + \langle \zeta \rangle_d \,. \tag{8.19}$$

 $(h_d - h)$ étant positif dans la zone de déferiement, on a une surélévation du niveau moyen, une surcôte de vague (wave set-up), qui est maximale à la côte. En réutilisant les valeurs numériques ci-dessus (houle incidente de hauteur 2 m), on a pour h = 0, à la côte, $\langle \zeta \rangle = 26$ cm.

C. DÉCÔTE ET SURCÔTE

Cette surcôte s'ajoute à la marée, aux surcôtes de tempêtes et à l'effet de baromètre inverse, et peut être très importante pour l'érosion côtière, ou les inondations, comme à Venise où les grosses vagues correspondent aux vents du Sud et tous ces effets s'additionnent. Son effet au large est par contre très faible car le gradient de pression lié à la pente de la surface exerce une force considérable quand il est intégré sur de grandes profondeurs (Ardhuin et coll. 2004). De plus, dans un océan stratifié il semble que ce soit plutôt le mode barocline qui soit excité par certains effets des vagues.

Près de la plage les vagues ne sont jamais tout à fait uniformes le long de la plage, et des différences de hauteurs de vagues suivant (Oy) créent un gradient de surcôte le long de la plage, et donc une circulation le long de la plage qui explique le transport de sable derrière les ouvrages de protection (formation de tombolos...). Mais ce n'est pas la seule source de circulation le long de la plage.

3. Courant littoral et instabilités

Nous avons, pour le moment seulement, utilisé l'équation (8.6) pour la composante x de la quantité de mouvement. Lorsque les vagues sont uniformes dans la direction (Oy) mais ont un angle d'incidence θ , l'équation (8.20) pour la composante y donne

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = \tau_{y,s} + \tau_{y,f} \tag{8.20}$$

 et

$$S_{xy} = E \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta. \tag{8.21}$$

Or $\sin \theta/C$ est conservé par la loi de Snel, et le d'énergie flux vers la plage $= EC_g/\cos\theta$ est conservé... en dehors de la zone de déferlement seulement. Il ne se passe donc rien de plus à cause des vagues hors de la zone de déferlement (on a déjàmis en évidence la décôte) car S_{xy} y est constant. Par contre, dans la zone de déferlement, S_{xy} diminue si $\sin \theta > 0$ et augmente si $\sin \theta < 0$ vers la plage et donc la divergence de S induit une force qui pousse l'eau le long de la plage. Puisque nous sommes dans un cas stationnaire et en négligeant la tension de vent $\tau_{y,s}$, seule la tension au fond peut maintenir l'équilibre, et comme elle est en général dans le sens opposé au courant moyen V, le courant moyen est vers les y > 0 si $\sin \theta > 0$.

En prenant une loi de friction quadratique instantanée

$$\mathbf{T}(t) = -C_f \left| (\mathbf{U} + \mathbf{u}) \right| (\mathbf{U} + \mathbf{u})$$
(8.22)

on montre facilement (Longuet-Higgins, 1970) que pour $|V| << \langle |u| \rangle$ et de faibles valeurs de θ , la tension devient

$$\tau_{y,f} = -\left\langle \rho C_f \left| u \right| \left(V + v \right) \right\rangle \tag{8.23}$$

où V est le courant moyen suivant (Oy) et (u, v) est la vitesse orbitale des vagues au fond.

$$u = \frac{gD}{2C}\cos\left(kx - \omega t\right) \tag{8.24}$$

$$\langle |u| \rangle = \frac{gD}{\pi C} \tag{8.25}$$

$$\tau_{y,f} = -\rho C_f \frac{gD}{\pi C} V \tag{8.26}$$

et donc V, le courant moyen le long de la plage est donné par

$$V = -\frac{\pi C}{\rho C_f g D} \frac{\partial \left(E C_g \cos \theta\right)}{\partial x} \frac{\sin \theta_0}{C_0}.$$
(8.27)

Ce courant, la dérive littorale, peut être très intense, de l'ordre de 1 m s^{-1} , et son orientation moyenne dépend du climat de vagues, déterminant le transport de sable le long de la plage.

L'équation (8.27) est le modèle de Thornton et Guza (1986), qui utilise la dissipation d'énergie des vagues $\partial EC_g \cos \theta / \partial x$ prévue par le modèle de transformation des vagues de Thornton et Guza (1983), décrit au début de ce chapitre. En revenant à nos vagues $H = 2 \text{ m}, T = 12 \text{ s et } \theta_0 = 20^\circ$, on trouve une valeur maximale du courant de 2 m s⁻¹ (voir figure 8.1). Ce modèle comporte assez de paramètres 'libres', en particulier C_f (on peut 'bidouiller') pour permettre de reproduire les observations. Les



FIG. 8.2 – Ondes longues liées aux groupes de vagues

premières vérifications furent faites lors de l'expérience NSTS (Nearshore Sediment Transport Study) en 1980, sur les plages de Torrey Pines (au Nord de San Diego) et Leadbetter (Santa Barbara). L'hypothèse $|V| << \langle |u| \rangle$ faite par Longuet-Higgins (1970) pour la forme paramétrée de la tension est assez dérisoire car pour une couche limite oscillante (chapitre 3), la tension n'est plus tout à fait quadratique, cela n'a pas empêché Thornton et Guza (1986) d'étudier en détail l'effet de la non-linéarité de τ_y en fonction de V quand $V \sim \langle |u| \rangle$. On peut améliorer le modèle en ajoutant une diffusion horizontale de quantité de mouvement qui réduira un peu les gradients de V. Beaucoup de travail a aussi été fait récemment sur le mécanisme exact du transfert de quantité de mouvement entre les vagues et le courant. Il a en particulier été mis en évidence que le "rouleau" (le paquet d'écume transporté par une vague qui déferle) pouvait jouer le rôle d'un "tampon à quantité de mouvement" et retarder le transfert entre les vagues et le courant.

4. Dérive de fond

On vient de voir que, dans ce chapitre, la description de la couche limite au fond était assez sommaire, or pour des applications au transport sédimentaire, la représentation des vitesses au voisinage du fond est très importante. Les oscillations des vagues au dessus de la couche limite et la non-linéarité des contraintes peuvent forcer un courant au dessus de la couche limite (Longuet-Higgins, 1953) dans le sens de propagation des vagues (voir aussi Mei, 1989, chapitre 9).

5. Ondes longues

Afin de compléter la description de la circulation littorale et notre bestiaire des processus hydrodynamiques, il convient de souligner que les conditions de vagues et de courants ne sont pas homogènes dans le temps (présence de groupes de vagues) et dans l'espace. La présence des groupes de vagues induit des oscillations du niveau moyen en vertu de (8.11) : au large, en absence de déferlement, là où les vagues sont hautes, le niveau moyen est plus bas, et il est plus élevé là où les vagues sont plus petites (figure 8.2). On a donc une vague de très grande longueur d'onde (la longueur d'onde du groupe de vague) qui se propage avec les vagues incidentes, à la vitesse des groupes (Longuet-Higgins et Stewart, 1962). Cette onde longue est une onde liée, ce n'est pas une onde libre qui suit la relation de dispersion.

Ces ondes longues forcées par les vagues furent mises en évidence pour la première fois par Munk (1949) et appelées 'surf beat' par leur effet de modulation sur le déferlement. Ces ondes longues sont aussi appelées ondes infragravitaires de part leur très basse fréquence ('infragravity waves'). Elles sont fortement amplifiées sur la plage, en particulier au niveau du jet de rive ('swash'), et peuvent y dominer la variance de l'élévation de la surface. Leur effet est important dans la zone de déferlement

C. DÉCÔTE ET SURCÔTE

à cause de leur relation de phase avec les groupes de vagues incidents : les creux de ces ondes longues induisent une vitesse vers le large qui coincident avec les grosses vagues qui remettent en suspension les sédiments. Ces ondes sont fortement réfléchies par la plage alors que les groupes de vagues incidents avec lesquels elles se propageaient y sont dissipé. Après réflexion ces ondes se propagent alors sous la forme d'onde libres, avec leur propre vitesse de phase, donnée par la relation de dispersion linéaire. Elles sont en grande partie piégée par la réfraction et se propagent donc en partie comme des ondes de coin le long de la côte.

Enfin, car il faut bien s'arrêter quelque part, le courant de dérive littoral forcé par les contraintes de radiation est lui-même instable à cause de son fort cisaillement, et ses méandres génèrent des oscillations (Oltman-Shay et coll., 1989) de très grande période ('far infragravity waves'). Le courant de dérive est aussi fortement couplé à la bathymétrie et est la source des courants de baïne ('rip currents'), dirigés vers le large.

Bibliographie

Abdalla, S. and L. Cavaleri, 2002 : Effect of wind variability and variable air density on wave modelling. J. Geophys. Res., 107(C7), 17.

Agnon, Y., A. V. Babanin, I. R. Young, and D. Chalikov, 2005 : Fine scale inhomogeneity of wind-wave energy input, sjewness and asymetry. *Geophys. Res. Lett.*, 32, L12603.

Agrawal, Y. C., E. A. Terray, M. A. Donelan, P. A. Hwang, A. J. Williams, W. Drennan, K. Kahma, and S. Kitaigorodskii, 1992 : Enhanced dissipation of kinetic energy beneath breaking waves. *Nature*, 359, 219–220.

Airy, G. B., 1841 : Tides and waves. *Encyclopedia metropolitana (1817–1845)*, H. J. Rose et al., Ed., London.

Alves, J. H. G. M. and M. L. Banner, 2003 : Performance of a saturation-based dissipation-rate source term in modeling the fetch-limited evolution of wind waves. J. Phys. Oceanogr., 33, 1274–1298.

Alves, J. H. G. M., M. L. Banner, and I. R. Young, 2003 : Revisiting the Pierson-Moskowitz asymptotic limits for fully developed wind waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 1301–1323.

Andersen, K. H., 1999 : The dynamics of ripples beneath surface waves and topics in shell models of turbulence. PhD thesis, Det Naturvidenskabelige Fakultet Københavns Universitet. [http://mail.isva.dtu.dk/ ken/Thesis.html].

Andersen, K. H. and J. Fredsøe, 1999 : How to calculate the geometry of vortex ripples. *Proceeding of the Coastal Sediments conference*, ASCE, 78–93.

Andrews, D. G. and M. E. McIntyre, 1978 : An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow. J. Fluid Mech., 89, 609–646.

Aouf, L., J.-M. Lefèvre, D. Hauser, and B. Chapron, 2006 : On the combined assimilation of RA-2 altimeter and ASAR wave data for the improvement of wave forcasting. *Proceedings of 15 Years of Radar Altimetry Symposium, Venice, March 13-18.*

Ardhuin, F., 2006 : On the momentum balance in shoaling gravity waves : a commentary of shoaling surface gravity waves cause a force and a torque on the bottom by K. E. Kenyon. *Journal of Oceanography*, 62, 917–922.

Ardhuin, F. and T. H. C. Herbers, 2002 : Bragg scattering of random surface gravity waves by irregular sea bed topography. J. Fluid Mech., 451, 1–33.

Ardhuin, F., T. G. Drake, and T. H. C. Herbers, 2002 : Observations of wave-generated vortex ripples on the North Carolina continental shelf. J. Geophys. Res., 107(C10). DOI :10.1029/2001JC000986.

Ardhuin, F., F.-R. Martin-Lauzer, B. Chapron, P. Craneguy, F. Girard-Ardhuin, and T. Elfouhaily, 2004a : Dérive à la surface de l'océan sous l'effet des vagues. *Comptes Rendus Géosciences*, 336, 1121–1130.

Ardhuin, F., B. Chapron, and T. Elfouhaily, 2004b : Waves and the air-sea momentum budget, implications for ocean circulation modelling. *J. Phys. Oceanogr.*, 34, 1741–1755.

Ardhuin, F. and A. Le Boyer, 2006 : Numerical modelling of sea states : validation of spectral shapes (in French). *Navigation*, 54(216), 55–71.

Ardhuin, F. and A. D. Jenkins, 2006 : On the interaction of surface waves and upper ocean turbulence. J. Phys. Oceanogr., 36(3), 551–557.

Ardhuin, F., N. Rascle, and K. A. Belibassakis, 2007a : Explicit wave-averaged primitive equations using a generalized lagrangian mean. *Ocean Modelling.* in press. See also [http://arxiv.org/abs/physics/0702067].

Ardhuin, F., T. H. C. Herbers, K. P. Watts, G. P. van Vledder, R. Jensen, and H. Graber, 2007b : Swell and slanting fetch effects on wind wave growth. *J. Phys. Oceanogr.*, 37(4), 908–931.

Athanassoulis, G. A. and K. A. Belibassakis, 1999 : A consistent coupled-mode theory for the propagation of small amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.*, 389, 275–301.

Babanin, A., I. Young, and M. Banner, 2001 : Breaking probabilities for dominant surface waves on water of finite depth. J. Geophys. Res., 106(C6), 11659–11676.

Backus, G. E., 1962 : The effect of the earth rotation on the propagation of ocean waves over long distances. *Deep Sea Res.*, 9, 185–197.

Banner, M. L., 1990 : Equilibrium spectra of wind waves. J. Phys. Oceanogr., 20, 966–984.

Banner, M. L. and O. M. Phillips, 1974 : On the incipient breaking of small scale waves. J. Fluid Mech., 65, 647–656.

Banner, M. L. and W. L. Peirson, 1998 : Tangential stress beneath wind-driven air-water interfaces. J. Fluid Mech., 364, 115–145.

Banner, M. L., A. V. Babanin, and I. R. Young, 2000 : Breaking probability for dominant waves on the sea surface. *J. Phys. Oceanogr.*, 30, 3145–3160.

Banner, M. L., J. R. Gemmrich, and D. M. Farmer, 2002 : Multiscale measurement of ocean wave breaking probability. *J. Phys. Oceanogr.*, 32, 3364–3374.

Barber, N. F., F. Ursell, J. Darbyshire, and M. J. Tucker, 1946 : A frequency analyser used in the study of ocean waves. *Nature*, 329–335.

Barnett, T. P. and A. J. Sutherland, 1968 : A note on an overshoot effect in wind-generated waves. J. Geophys. Res., 73(22), 6879–6885.

Barrick, D. E., 1972 : First order theory and analysis of MF/HF/VHF scatter from the sea. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-20, 2–10.

Bascom, W., 1959 : Ocean waves. Scientific American, 201(2), 45-59.

Battjes, J. A. and J. P. F. M. Janssen, 1978 : Energy loss and set-up due to breaking of random waves. *Proceedings of the 16th international conference on coastal engineering*, ASCE, 569–587.

Belcher, S. E., 1999 : Wave growth by non-separated sheltering. Eur. J. Mech. B/Fluids, 18, 447-462.

Belcher, S. E. and J. C. R. Hunt, 1993 : Turbulent shear flow over slowly moving waves. J. Fluid Mech., 251, 109–148.

Belibassakis, K. A., G. A. Athanassoulis, and T. P. Gerostathis, 2001 : A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry. *Appl. Ocean Res.*, 23, 319–336.

Benjamin, T. B. and J. E. Feir, 1967 : The disintegration of wav trains on deep water. part 1. theory. J. Fluid Mech., 27, 417–430.

Benoit, M., P. Frigaard, and H. A. Schäffer, 1997 : Analyzing multidirectional wave spectra : a tentative classification of available methods. *Proceedings of the 1997 IAHR conference, San Francisco*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 131–158.

Berkhoff, J. C. W., 1972 : Computation of combined refraction-diffraction. *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, Vacouver*, ASCE, New York, N. Y., 796–814.

Bidlot, J., S. Abdalla, and P. Janssen, 2005 : A revised formulation for ocean wave dissipation in CY25R1. Technical Report Memorandum R60.9/JB/0516, Research Department, ECMWF, Reading, U. K.

Biesel, F., 1950 : Etude théorique de la houle en eau courante. La houille blanche, Numéro spécial A, 279–285.

Blachman, N. M. and G. A. McAlpine, 1969 : The spectrum of a high-index fm waveform : Woodward's theorem revisited. *IEEE Trans. Comm. Tech.*, COM-17(2), 201–207.

Bonmarin, P., 1989 : Geometric properties of deep-water breaking waves. J. Fluid Mech., 209, 405–433.

Boussinesq, J., 1872 : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pures Appl., 17(2), 55–108.

Bowen, A. J., D. L. Inman, and V. P. Simmons, 1968 : Wave "set-down" and wave "set-up". J. Geophys. Res., 73(8), 2569–2577.

Bretherton, F. P. and C. J. R. Garrett, 1968 : Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proc. Roy. Soc. of London*, A302, 529–554.

Bühler, O. and T. E. Jacobson, 2001 : Wave-driven currents and vortex dynamics on barred beaches. *J. Fluid Mech.*, 449, 313–339.

Carrier, G. F. and H. P. Greenspan, 1958 : Water waves of finite amplitude on a sloping beach. J. Fluid Mech., 4, 97–109.

Cartwright, D. E. and N. D. Smith, 1964 : Buoy techniques for obtaining directional wave spectra. *Buoy technology, transactions of the International Buoy technology symposium, Washington, D. C.*, National Academy of Sciences, Marine Technology society, 111–136.

Caudal, G., 2002: A physical model for the narrowing of the directional sea wave spectra in the short gravity to gravity-capillary range. J. Geophys. Res., 107(C10), 3148.

Cavaleri, L., S. Curiotto, G. D. Porta, and A. Mazzoldi, 1981 : Directional wave recording in the northern Adriatic sea. *Nuovo Cimento*, 4C(5), 519–534.

CERC, 1977 : Shore protection manual, vol. 3 volumes. U. S. Army Coastal Engineering Research Center.

Chalikov, D. V. and M. Y. Belevich, 1993 : One-dimensional theory of the wave boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 63, 65–96.

Chapron, B., H. Johnsen, and R. Garello, 2001 : Wave and wind retrieval from SAR images of the ocean. Ann. Telecommun., 56, 682–699.

Chapron, B., F. Collard, and F. Ardhuin, 2005 : Direct measurements of ocean surface velocity from space : interpretation and validation. J. Geophys. Res., 110(C07008). doi:10.1029/2004JC002809.

Charnock, H., 1955 : Wind stress on a water surface. Quart. Journ. Roy. Meteorol. Soc., 81, 639-640.

Chase, J. L., L. J. Cote, W. Marks, E. Mehr, W. J. Pierson, Jr., F. G. Rönne, G. Stephenson, R. C. Vetter, and R. G. Walden, 1957 : The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the Stereo Wave Observation Project. Technical report, N. Y. U. Coll. of Eng., Dept. of Meteorol. and Oceanog. and Engineering Statistic Group.

Cokelet, E. D., 1977 : Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 286, 183–230.

Collard, F., F. Ardhuin, and B. Chapron, 2005 : Extraction of coastal ocean wave fields from SAR images. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 30(3), 526–533.

Cox, C. and W. Munk, 1954 : Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. J. Opt. Soc. Am., 44(11), 838–850.

Craik, A. D. D., 2004 : The origins of water wave theory. Annu. Rev. Fluid Mech., 36, 1–28.

Dalrymple, R. A., 1974 : A finite amplitude wave on a linear shear current. J. Geophys. Res., 79, 4498–4504.

Davies, A. G. and C. Villaret, 1999 : Eulerian drift induced by progressive waves above rippled and very rough beds. *J. Geophys. Res.*, *C1*, 1465–1488.

Davis, R. E. and L. A. Regier, 1977 : Methods for estimating directional wave spectra from multi-element arrays. J. Mar. Res., 35(3), 453–478.

de Caliginy, A., 1878 : Expériences sur les mouvements des molécules liquides des ondes courantes, considérées dans leur mode d'action sur la marche des navires. C. R. Acad. Sci. Paris, 87, 1019–1023.

de Laplace, P. S., 1776 : Suite des recherches sur plusieurs points du système du monde (XXV–XXVII). *Mém. Présentés Acad. R. Sci. Inst. France*, 542–552.

Dean, R. G., 1965 : Stream function representation of nonlinear ocean waves. J. Geophys. Res., 70, 4561–4572.

Dean, R. G. and R. A. Dalrymple, 1991 : Water wave mechanics for engineers and scientists. World Scientific, Singapore, second edition. 353 pp.

Dingler, J. R., 1974 : *Wave-formed ripples in nearshore sands*. PhD thesis, University of California, San Diego.

Dobson, R. S., 1967 : Some applications of a digital computer to hydraulic engineering problems. Technical Report 80, Department of Civil Engineering, Stanford University.

Donelan, M. A., 1998 : Air-water exchange processes. *Physical Processes in Lakes and Oceans*, Jörg Imberger, Ed., American Geophysical Union, Washington, D.C., pages 18–36. ISBN 0-87590-268-5.

Donelan, M. A., J. Hamilton, and W. H. Hui, 1985 : Directional spectra of wind-generated waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 315, 509–562.

Donelan, M. A., W. M. Drennan, and A. K. Magnusson, 1996 : Nonstationary analysis of the directional properties of propagating waves. J. Phys. Oceanogr., 26, 1901–1914.

Donelan, M. A., A. V. Babanin, I. R. Young, and M. L. Banner, 2006 : Wave-follower field measurements of the wind-input spectral function. part ii : parameterization of the wind input. *J. Phys. Oceanogr.*, *36*, 1672–1689.

Donelan, M., M. Skafel, H. Graber, P. Liu, D. Schwab, and S. Venkatesh, 1992 : On the growth rate of wind-generated waves. *Atmosphere Ocean*, 30(3), 457–478.

Dore, B. D., 1978 : Some effects of the air-water interface on gravity waves. *Geophys. Astrophys. Fluid.* Dyn., 10, 215–230.

Drennan, W. M., H. C. Graber, D. Hauser, and C. Quentin, 2003 : On the wave age dependence of wind stress over pure wind seas. J. Geophys. Res., 108(C3), 8062. doi :10.1029/2000JC00715.

Duncan, J. H., 1981 : An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 377, 331–348.

Duncan, J. H., 1983 : The breaking and non-breaking wave resistance of a two-dimensional hydrofoil. J. Fluid Mech., 126, 507–520.

Ehrenmark, U. T., 2005 : An alternative dispersion equation for water waves over an inclined bed. J. Fluid Mech., 543, 249–266.

Elachi, C., T. W. Thompson, and D. King, 1977 : Ocean wave patterns under hurricane Gloria : observation with airborne synthetic aperture radar. *Science*, 198, 609–610.

Elfouhaily, T., B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark, 1997 : A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. J. Geophys. Res., 102(C7), 15781–15796.

Elfouhaily, T., D. R. Thompson, D. Vandemark, and B. Chapron, 2000 : Truncated hamiltonian versus surface perturbation in nonlinear wave theories. *Waves in Random Media*, 10, 103–116.

Elfouhaily, T., M. Joelson, S. Guignard, H. Branger, D. R. Thompson, B. Chapron, and D. Vandemark, 2003 : Analysis of random nonlinear water waves : the Stokes-Woodward technique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 331, 189–196.

Elgar, S., B. Raubenheimer, and T. H. C. Herbers, 2003 : Bragg reflection of ocean waves from sandbars. *Geophys. Res. Lett.*, 30, 1016. doi :10.1029/2002GL016351.

Elliot, J. A., 1972 : Microscale pressure fluctuations measured within the lower atmospheric boundary layer. J. Fluid Mech., 53, 351–384.

Engen, G. and H. Johnsen, 1995 : Sar-ocean wave inversion using image cross spectra. *IEEE Trans. on Geosci. and Remote Sensing*, 33, 4.

Ewans, K. C., 1998 : Observations of the directional spectrum of fetch-limited waves. J. Phys. Oceanogr., 28, 495–512.

Fabrikant, A. L., 1976 : Quasilinear theory of wind-wave generation. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 12, 524–526.

Fermi, E., J. Pasta, and S. Ulam, 1955 : Studies of nonlinear problems. i. Nonlinear wave motion. Lectures in applied mathematics, vol. 15, A. C. Newell, Ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pages 143–156.

Garrett, C., 1976 : Generation of Langmuir circulations by surface waves - a feedback mechanism. J. Mar. Res., 34, 117–130.

Giovanangeli, J. P., N. Reul, M. H. Garat, and H. Branger, 1999 : Some aspects of wind-wave coupling at high winds : an experimental study. *Wind-over-wave couplings*, S. G. Sajjadi, N. H.Thomas, et J. C. R. Hunt, Eds., Clarendon Press, Oxford, U. K., 81–90.

Graber, H., E. Terray, M. Donelan, W. Drennan, J. V. Leer, and D. Peters, 2000 : Asis – a new air-sea interaction spar buoy : design and performance at sea. J. Atmos. Ocean Technol., 17, 708–720.

Graber, H. C. and O. S. Madsen, 1988 : A finite-depth wind-wave model. part 1 : model description. J. Phys. Oceanogr., 18, 1,465–1,483.

Grant, W. D. and O. S. Madsen, 1979 : Combined wave and current interaction with a rough bottom. J. Geophys. Res., 84, 1797–1808.

Grant, W. D. and O. S. Madsen, 1982 : Movable bed roughness in unsteady oscillatory flow. J. Geophys. Res., 87(C1), 469–481.

Green, J. J., 2003 : Discretising barrick's equations. *Wind over waves II : forecasting and fundamental applications*, Shahrdad G. Sajjadi et Julian C. R. Hunt, Eds., Horwood Publishing, Chichester, U. K., 219–232.

Greenslade, D. J. M., 2001 : A wave modelling study of the 1998 Sydney to Hobart yacht race. Aust. Met. Mag., 50, 53–63.

Groeneweg, J., 1999 : *Wave-current interactions in a generalized Lagrangian mean formulation*. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.

Hara, T. and S. E. Belcher, 2002 : Wind forcing in the equilibrium range of wind-wave spectra. J. Fluid Mech., 470, 223–245.

Hasselmann, D. and J. Bösenberg, 1991 : Field measurements of wave-induced pressure over wind-sea and swell. J. Fluid Mech., 230, 391–428.

Hasselmann, K., 1962 : On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, part 1 : general theory. J. Fluid Mech., 12, 481–501.

Hasselmann, K., 1966 : Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Rev.* of *Geophys.*, 4(1), 1–32.

Hasselmann, K., 1970: Wave-driven inertial oscillations. Geophys. Fluid Dyn., 1, 463–502.

Hasselmann, K., 1971 : On the mass and momentum transfer between short gravity waves and largerscale motions. J. Fluid Mech., 4, 189–205.

Hasselmann, K., 1974 : On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping. *Boundary-Layer Meteorol.*, 6, 107–127.

Hasselmann, K., T. P. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D. E. Cartwright, K. Enke, J. A. Ewing, H. Gienapp, D. E. Hasselmann, P. Kruseman, A. Meerburg, P. Müller, D. J. Olbers, K. Richter, W. Sell, and H. Walden, 1973 : Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project. *Deut. Hydrogr. Z.*, 8(12), 1–95. Suppl. A.

Hasselmann, K., R. K. Raney, W. J. Plant, W. Alpers, R. A. Shuchman, D. R. Lyzenga, C. L. Rufenach, and M. J. Tucker, 1985 : Theory of Synthetic Aperture Radar ocean imaging : a MARSEN view. *J. Geophys. Res.*, 90(C3), 4659–4686.

Hauser, D., G. Caudal, G. J. Rijckenberg, D. Vidal-Majar, G. Laurent, and P. Lancelin, 1992 : RESSAC : a new airborne FM/CW radar ocean wave spectrometer. *IEEE Trans. on Geosci. and Remote Sensing*, 30, 981–995.

Heathershaw, A. D., 1982 : Seabed-wave resonance and sand bar growth. Nature, 296, 343–345.

Herbers, T. H. C. and R. T. Guza, 1990 : Estimation of directional wave spectra from multicomponent observations. J. Phys. Oceanogr., 20, 1703–1724.

Herbers, T. H. C. and M. C. Burton, 1997 : Nonlinear shoaling of directionally spread waves on a beach. J. Geophys. Res., 102(C9), 21,101–21,114.

Herterich, K. and K. Hasselmann, 1980 : A similarity relation for the non-linear energy transfer in a finite-depth gravity-wave spectrum. J. Fluid Mech., 97, 215–224.

Hino, M., 1968 : Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water. J. Fluid Mech., 34, 565–573.

Holthuijsen, L. H. and T. H. C. Herbers, 1986 : Statistics of breaking waves observed as whitecaps in the open sea. J. Phys. Oceanogr., 16, 290–297.

Hristov, T. S., S. D. Miller, and C. A. Friehe, 2003 : Dynamical coupling of wind and ocean waves through wave-induced air flow. *Nature*, 422, 55–58.

Huang, N. E., 1979 : On surface drift currents in the ocean. J. Fluid Mech., 91, 191–208.

Hwang, P. A. and D. W. Wang, 2004 : Field measurements of duration-limited growth of wind-generated ocean surface waves at young stages of development. J. Phys. Oceanogr., 34, 2316–2326.

Jackson, F. C., W. T. Walton, and P. L. Baker, 1985 : Aircraft and satellite measurement of ocean wave directional spectra using scanning-beam microwave radars. J. Geophys. Res., 90, 987–1004.

Janssen, P., 2003 : Nonlinear four-wave interactions and freak waves. J. Phys. Oceanogr., 33, 863-884.

Janssen, P., 2004 : *The interaction of ocean waves and wind*. Cambridge University Press, Cambridge, 300 pp.

Janssen, P. A. E. M., 1991 : Quasi-linear theory of of wind wave generation applied to wave forecasting. *J. Phys. Oceanogr.*, 21, 1631–1642. See comments by D. Chalikov, J. Phys. Oceanogr. 1993, vol. 23 pp. 1597-1600.

Janssen, P. A. E. M., K. Hasselmann, S. Hasselmann, and G. J. Komen, 1994 : Parameterization of source terms and the energy balance in a growing wind sea. *Dynamics and modelling of ocean waves*, G. J. Komen et al., Ed., Cambridge University Press, pages 215–238.

Janssen, P. A. E. M., O. Saetra, C. Wettre, and H. Hersbach, 2004 : Impact of the sea state on the atmosphere and ocean. *Annales Hydrographiques*, *6e série*, vol. 3(772), 3–1–3–23.

Janssen, P., J.-R. Bidlot, S. Abdalla, and H. Hersbach, 2005 : Progress in ocean wave forecasting at ECMWF. Technical Report Memorandum 478, Research Department, ECMWF, Reading, U. K.

Jenkins, A. D. and F. Ardhuin, 2004 : Interaction of ocean waves and currents : How different approaches may be reconciled. *Proc. 14th Int. Offshore & Polar Engng Conf., Toulon, France, May 23–28, 2004*, vol. 3, Int. Soc. of Offshore & Polar Engrs, 105–111.

Jensen, B. L., B. M. Sumer, and J. Fredsøe, 1989 : Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 206, 265–297.

Jessup, A. T. and K. R. Phadnis, 2005 : Measurement of the geometric and kinematic properties of microscale breaking waves from infrared imagery using a PIV algorithm. *Meas. Sci. Technol.*, 16, 1961–1969.

Kahma, K. K. and M. A. Donelan, 1988 : A laboratory study of the minimum wind speed for wind wave generation. J. Fluid Mech., 192, 339–364.

Kahma, K. K. and C. J. Calkoen, 1992 : Reconciling discrepancies in the observed growth of wind-generated waves. J. Phys. Oceanogr., 22, 1389–1405.

Kajiura, K., 1968 : A model of the bottom boundary layer in water waves. Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. Tokyo, 46, 75–123.

Kenyon, K. E., 1969 : Stokes drift for random gravity waves. J. Geophys. Res., 74, 6991-6994.

Kerbaol, V., B. Chapron, and P. Vachon, 1998 : Analysis of ers-1/2 synthetic aperture radar wave mode imagettes. J. Geophys. Res., 103(C4), 7833–7846.

Kinsman, B., 1965 : *Wind waves*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 676 p. Reprinted by Dover Phoenix editions, Mineola, N. Y.

Kirby, J. T., 1986 : Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves. J. Geophys. Res., 91(C1), 933–952.

Kirby, J. T., 1998 : Discussion of 'note on a nonlinearity parameter of surface waves' by S. Beji. *Coastal Eng.*, 34, 163–168.

Kirby, J. T. and T.-M. Chen, 1989 : Surface waves on vertically sheared flows : approximate dispersion relations. J. Geophys. Res., 94(C1), 1013–1027.

Kitaigorodskii, S. A., 1994 : A note on the influence of breaking wind waves on the aerodynamic roughness of the sea surface as seen from below. *Tellus*, 46A, 681-685.

Koga, M., 1982 : Bubble entrainment in breaking wind waves. Tellus, 34, 481–489.

Komar, P. D., 1998: Beach processes and sedimentation. Prentice-Hall, second edition. 544 p.

Komen, G. J., K. Hasselmann, and S. Hasselmann, 1984 : On the existence of a fully developed windsea spectrum. J. Phys. Oceanogr., 14, 1271–1285.

Komen, G. J., L. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, and P. A. E. M. Janssen, 1994 : *Dynamics and modelling of ocean waves*. Cambridge University Press, Cambridge, 554 pp.

Korteweg, D. J. and G. de Vries, 1895 : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 39, 422–443.

Kudryavtsev, V. N., 1994 : The coupling of wind and internal waves. J. Fluid Mech., 278, 33-62.

Kudryavtsev, V. N., V. K. Makin, and B. Chapron, 1999 : Coupled sea surface–atmosphere model. 2. spectrum of short wind waves. J. Geophys. Res., 104, 7625–7639.

Kudryavtsev, V. N. and V. K. Makin, 2004 : Impact of swell on the marine atmospheric boundary layer. J. Phys. Oceanogr., 34, 934–949.

Kuik, A. J., G. P. van Vledder, and L. H. Holthuijsen, 1988 : A method for the routine analysis of pitch-and-roll buoy wave data. J. Phys. Oceanogr., 18, 1020–1034.

Lamarre, E. and W. K. Melville, 1991 : Air entrainment and dissipation in breaking waves. *Nature*, 351, 469–472.

Lamb, H., 1932 : *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 6th edition, 738 pp.

Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, 1960 : *Mechanics*. Pergamon Press Addison-Wesley, Reading, MA, 524–526.

Langmuir, I., 1938 : Surface motion of water induced by wind. Science, 87, 119–123.

Large, W. G., J. C. McWilliams, and S. C. Doney, 1994 : Oceanic vertical mixing : a review and a model with nonlocal boundary layer parameterization. *Rev. of Geophys.*, *32*, 363–403.

Lemaire, D. and P. Sobiesky, 1999 : Full-range sea surface spectrum in nonfully developped state for scattering calculations. *IEEE Trans. on Geosci. and Remote Sensing*, 37, 1038–1051.

Levi-Civita, T., 1925 : Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Matematische Annalen, XCII*, 264–314.

Li, M. Z. and C. L. Amos, 1999 : Sheet flow and large wave ripples under combined waves and currents : field observations, model predictions and effect on boundary layer dynamics. *Continental Shelf Research*, 19, 637–663.

Lighthill, M. J., 1962 : Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by the wind. J. Fluid Mech., 14, 385–398.

Long, C. E. and D. T. Resio, 2007 : Wind wave spectral observations in Currituck Sound, North Carolina. J. Geophys. Res., 112, C05001.

Long, R. B. and K. Hasselmann, 1979 : A variational technique for extracting directional spectra from multi-component wave data. J. Phys. Oceanogr., 9, 373–381.

Longuet-Higgins, M. S., 1950 : A theory of the origin of microseisms. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 243, 1–35.

Longuet-Higgins, M. S., 1953 : Mass transport under water waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 245, 535–581.

Longuet-Higgins, M. S., 1967 : On the wave-induced difference in mean sea level between the two sides of a submerged breakwater. J. Mar. Res., 25, 148–153.

Longuet-Higgins, M. S., 1969 : Action of a variable stress at the surface of water waves. *Phys. of Fluids*, 12(4), 737–740.

Longuet-Higgins, M. S., 1970 : Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1. J. Geophys. Res., 75, 6778–6789.

Longuet-Higgins, M. S., 1977 : The mean forces exerted by waves on floating or submerged bodies with applications to sand bars and wave power machines. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 352, 463–480.

Longuet-Higgins, M. S., 1979 : The trajectories of particles in steep, symmetric gravity waves. J. Fluid Mech., 94, 497–517.

Longuet-Higgins, M. S., 1984 : New integral relations for gravity waves of finite amplitude. J. Fluid Mech., 149, 205–215. see also Yu and Wu, J. Fluid Mech., 1987.

Longuet-Higgins, M. S., 2005 : On wave set-up in shoaling water with a rough sea bed. J. Fluid Mech., 527, 217–234. An audio recording of a conference by Longuet-Higgins on this topic is available at http://av.fields.utoronto.ca :8080/ramgen/03-04/waterwaves/longuet-higgins.rm.

Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart, 1962 : Radiation stresses and mass transport in surface gravity waves with application to 'surf beats'. J. Fluid Mech., 13, 481–504.

Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart, 1963 : A note on wave set-up. J. Mar. Res., 21, 4-10.

Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright, and N. D. Smith, 1963 : Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. *Ocean Wave Spectra, proceedings of a conference, Easton, Maryland*, National Academy of Sciences, Prentice-Hall, 111–136.

Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart, 1964 : Radiation stress in water waves, a physical discussion with applications. *Deep Sea Research*, 11, 529–563.

Longuet-Higgins, M. S. and J. D. Fenton, 1974 : On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 340, 471–493.

Lu, N. Q., A. Prosperetti, and S. W. Yoon, 1990 : Underwater noise emissions from bubble clouds. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 15(4), 275–281.

Lygre, A. and H. E. Krogstad, 1986 : Maximum entropy estimation of the directional distribution in ocean wave spectra. J. Phys. Oceanogr., 16, 2,052–2,060.

Ma, B. B., J. A. Nystuen, and R.-C. Lien, 2005 : Prediction of underwater sound levels from rain and wind. J. Acoust. Soc. Amer., 117(6), 3555–3565.

Madsen, O. S., P. P. Mathisen, and M. M. Rosengaus, 1990 : Movable bed friction factors for spectral waves. *Proceedings of the 22nd international conference on coastal engineering*, ASCE, 420–429.

Magne, R., K. Belibassakis, T. H. C. Herbers, F. Ardhuin, W. C. O'Reilly, and V. Rey, 2007 : Evolution of surface gravity waves over a submarine canyon. *J. Geophys. Res.*, 112, C01002.

Manasseh, R., A. V. Babanin, C. Forbes, K. Rickards, I. Bobevski, and A. Ooi, 2006 : Passive acoustic determination of wave-breaking events and their severity across the spectrum. *J. Atmos. Ocean Technol.*, 23, 599–618.

Marin, F., 2004 : Eddy viscosity and Eulerian drift over rippled beds in waves. *Coastal Eng.*, 50, 139–159.

Marmorino, G. O., G. B. Smith, and G. J. Lindemann, 2005 : Infrared imagery of large-aspect-ratio Langmuir circulation. *Continental Shelf Research*, 25, 1–6.

Marom, M., R. M. Goldstein, E. B. Thornton, and L. Shemer, 1990 : Remote sensing of ocean wave spectra by interferometric synthetic aperture radar. *Nature*, 345, 793–795.

Massel, S. R., 1993 : Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Eng.*, 19(5), 97–126.

Mastenbroek, C., V. K. Makin, M. H. Garat, and J. P. Giovanangeli, 1996 : Experimental evidence of the rapid distortion of turbulence in the air flow over water waves. *J. Fluid Mech.*, 318, 273–302.

Mathisen, P. P. and O. S. Madsen, 1996 : Wave and currents over a fixed rippled bed. 2. bottom and apparent roughness experienced by currents in the presence of waves. *J. Geophys. Res.*, 101(C7), 16,543–16,550.

Mathisen, P. P. and O. S. Madsen, 1999 : Wave and currents over a fixed rippled bed. 3. bottom and apparent roughness for spectral waves and currents. J. Geophys. Res., 104(C8), 18,447–18,461.

McGoldrick, L. F., O. M. Phillips, N. E. Huang, and T. H. Hodgson, 1966 : Measurements of third-order wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 25, 437–456.

McIntyre, M. E., 1988 : A note on the divergence effect and the Lagrangian-mean surface elevation in periodic water waves. J. Fluid Mech., 189, 235–242.

McWilliams, J. C. and J. M. Restrepo, 1999 : The wave-driven ocean circulation. J. Phys. Oceanogr., 29, 2523–2540.

Mei, C. C., 1989 : Applied dynamics of ocean surface waves. World Scientific, Singapore, second edition. 740 p.

Mellor, G. L. and T. Yamada, 1982 : Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20(C2), 851–875.

Melville, W. K. and R. J. Rapp, 1988 : The surface velocity in steep and breaking waves. J. Fluid Mech., 169, 1–22.

Melville, W. K. and P. Matusov, 2002 : Distribution of breaking waves at the ocean surface. *Nature*, 417, 58–63.

Miche, A., 1944 : Mouvements ondulatoire de la mer en profondeur croissante ou décroissante. forme limite de la houle lors de son déferlement. application aux digues maritimes. deuxième partie. mouvements ondulatoires périodiques en profondeur régulièrement décroissante. *Annales des Ponts et Chaussées*, *Tome 114*, 131–164,270–292.

Miles, J., 1996 : Surface wave generation : a viscoelastic model. J. Fluid Mech., 322, 131-145.

Miles, J. W., 1957 : On the generation of surface waves by shear flows. J. Fluid Mech., 3, 185–204.

Miles, J. W., 1981 : The Korteweg-de Vries equation : a historical essay. J. Fluid Mech., 106, 131-147.

Monahan, E. C. and D. K. Woolf, 1989 : Comments on "variations of whitecap coverage with wind streess and water temperature". J. Phys. Oceanogr., 19, 706–709.

Munk, W. H., 1949 : Surf beat. Eos Trans. AGU, 30, 849-854.

Munk, W. H. and M. A. Traylor, 1947: Refraction of ocean waves : a process linking underwater topography to beach erosion. *Journal of Geology*, LV(1), 1–26.

Nielsen, P., 1992 : Coastal bottom boudary layers and sediment transport. World Scientific Publishing.

Nikuradse, J., 1933 : Strömungsgestze in rauhen rohren. Technical Report 361, VDI. (English translation : NACA Tech. Memo. 1292, National Advisory Commission for Aeronautics, Washington D.C., 1950).

Oltman-Shay, J., P. A. Howd, and W. A. Birkemeier, 1989 : Shear instabilities of the mean longshore current, 2, field observations. J. Geophys. Res., 94, 18031–18042.

Onorato, M., A. R. Osborne, and M. Serio, 2002 : Extreme wave events in directional, random oceanic sea states. *Phys. of Fluids*, 14, L25–L28.

O'Reilly, W. C. and R. T. Guza, 1991 : Comparison of spectral refraction and refraction-diffraction wave models. J. of Waterway, Port Coast. Ocean Eng., 117(3), 199–215.

O'Reilly, W. C., T. H. C. Herbers, R. J. Seymour, and R. T. Guza, 1996 : A comparison of directional buoy and fixed platform measurements of Pacific swell. *J. Atmos. Ocean Technol.*, 13, 231–238.

Osborne, A., M. Onorato, and M. Serio, 2003 : The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep water gravity wave trains. *Phys. Lett.*, A275, 386–393.

Osborne, A. R. and T. L. Burch, 1980 : Coupling between a surface-wave spectrum and an internal wave : modulation interaction. *Science*, 208(4443), 513–460.

Osborne, A. R., L. Bergamasco, M. Serio, L. Bianco, L. Cavaleri, M. Drago, L. Iovenitti, and D. Viezzoli, 1996 : Nonlinear shoaling of shallow water waves : perspective in term of the inverse scattering transform. *Nuovo Cimento*, 19C, 151–176.

Pawka, S. S., 1983 : Island shadows in wave directional spectra. J. Geophys. Res., 88, 2579–2591.

Peak, S. D., 2004 : Wave refraction over complex nearshore bathymetry. M.S. thesis, Naval Postgraduate School.

Peregrine, D., 1999 : Large-scale vorticity generation by breakers in shallow and deep water. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18, 404–408.

Peregrine, D. H., 1967 : Long waves on a beach. J. Fluid Mech., 27, 815-827.

Pettersson, H., H. C. Graber, D. Hauser, C. Quentin, K. Kahma, W. M. Drennan, and M. A. Donelan, 2003 : Directional wave measurements from three wave sensors during the FETCH experiment. *J. Geophys. Res.*, 108(C3), 8061. doi:10.1029/2001JC001164.

Phillips, O. M., 1958 : The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. J. Fluid Mech., 4, 426–433.

Phillips, O. M., 1960 : On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. J. Fluid Mech., 9, 193–217.

Phillips, O. M., 1961 : A note on the turbulence generated by gravity waves. J. Geophys. Res., 66, 2889–2893.

Phillips, O. M., 1977 : The dynamics of the upper ocean. Cambridge University Press, London. 336 p.

Phillips, O. M., 1984 : On the response of short ocean wave components at a fixed wavenumber to ocean current variations. J. Phys. Oceanogr., 14, 1425–1433.

Phillips, O. M., 1985 : Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves. J. Fluid Mech., 156, 505–531.

Pierson, Jr, W. J. and L. Moskowitz, 1964 : A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. J. Geophys. Res., 69(24), 5,181–5,190.

Pierson, W. J., 1972 : The loss of two British trawlers – a study in wave refraction. Journal of Navigation, 25(3), 291–304.

Plant, W. J., 1982: A relationship between wind stress and wave slope. J. Geophys. Res., 87, 1961–1967.

Powell, M. D., P. J. Vickery, and T. A. Reinhold, 2003 : Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones. *Nature*, 422, 279–283.

Prevosto, M. and G. Z. Forristall, 2002 : Statistics of wave crest from models vs. measurements. Proceedings of OMAE 2002 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 23-28 June 2002, Oslo, Norway, ASME, OMAE2002–28446.

Priestley, M. B., 1981 : Spectral analysis and time series. Academic Press, London. 890 p.

Quartly, G. D., 2000 : The gate dependence of geophysical retrievals from the TOPEX altimeter. J. Atmos. Ocean Technol., 17, 1247–1251.

Radder, A. C., 1979 : On the parabolic equation method for water wave propagation. J. Fluid Mech., 95, 159–176.

Rascle, N., F. Ardhuin, and E. A. Terray, 2006 : Drift and mixing under the ocean surface. part 1 : a coherent one-dimensional description with application to unstrati.ed conditions. J. Geophys. Res., 111, C03016. doi :10.1029/2005JC003004.

Rayevskiy, M. A., 1983 : On the propagation of gravity waves in randomly inhomogeneous nonstradystate currents. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 19(6), 475–479.

Reul, N. and B. Chapron, 2003 : A model of sea-foam thickness distribution for passive microwave remote sensing applications. J. Geophys. Res., 108(C10), 3321. doi:10.1029/2003JC001887.

Russell, R. C. H. and J. D. C. Osorio, 1958 : An experimental investigation of drift profiles in a closed channel. *Proceedings of the 6th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, 171–193.

Santala, M. J. and E. A. Terray, 1992 : A technique for making unbiased estimates of current shear from a wave-follower. *Deep Sea Res.*, 39, 607–622.

Saville, T., 1961 : Experimental determination of wave set-up. Proc. 2nd Tech. Conf. on Hurricanes, Miami Beach, FL., Nat. Hurricane Res. Proj. Rep. 50, US Dept. of Commerce, 242–252.

Schuler, D. L., 1978 : Remote sensing of directional gravity wave spectra and surface currents using a microwave dual-frequency radar. *Radio Science*, 13(2), 321-331.

Schwartz, L. W., 1974 : Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves. J. Fluid Mech., 62, 553–578.

Shields, A., 1936 : Anwendung der ähnlichkeits-Mechanik und der Turbulenz-forschung auf die Geschiebebewegung. *Preussische Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, 26*, 524–526. translated as California Inst. Technol. W. M. Keck Lab. for Hydraulic Water Res. Report 167.

Siddiqui, M. H. K. and M. R. Loewen, 2007 : Characteristics of the wind drift layer and microscale breaking waves. J. Fluid Mech., 573, 417–456.

Smith, J. A., 1990 : Modulation of short wind waves by long waves. *Surface waves and fluxes*, G.L. Geernaert et W.J. Plant, Eds., Kluwer Academic, Dordrecht.

Smith, J. A., 2006 : Wave-current interactions in finite-depth. J. Phys. Oceanogr., 36, 1403–1419.

Snodgrass, F. E., G. W. Groves, K. Hasselmann, G. R. Miller, W. H. Munk, and W. H. Powers, 1966 : Propagation of ocean swell across the Pacific. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A249, 431–497.

Snyder, R. L., F. W. Dobson, J. A. Elliot, and R. B. Long, 1981 : Array measurement of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 102, 1–59.

Song, J.-B. and M. L. Banner, 2002 : On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. part i : Unforced irrotational wave groups. J. Phys. Oceanogr., 32, 2541–2558.

Soulsby, R., 1997 : *Dynamics of marine sands, a manual for practical applications*. Thomas Telford Publications, London, 256 pp.

Styles, R. and S. M. Glenn, 2000 : Modeling stratified wave and current bottom boundary layers on the continental shelf. J. Geophys. Res., 105(C10), 24,119–24,139. DOI :10.1029/2001JC000864.

Sverdrup, H. U. and W. H. Munk, 1947 : Wind, sea, and swell : theory of relations for forecasting. Technical Report 601, U. S. Hydrographic Office.

Tanaka, M., 2001 : Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. J. Fluid Mech., 444, 199–221.

Teixeira, M. A. C. and S. E. Belcher, 2002 : On the distortion of turbulence by a progressive surface wave. J. Fluid Mech., 458, 229–267.

Terray, E. A., W. M. Drennan, and M. A. Donelan, 2000 : The vertical structure of shear and dissipation in the ocean surface layer. *Proc. Symp. on Air-Sea Interaction, Sydney*, University of New South Wales, 239–245.

Thomson, J., S. Elgar, and T. Herbers, 2005 : Reflection and tunneling of ocean waves observed at a submarine canyon. *Geophys. Res. Lett.*, *32*, L10602.

Thornton, E. B. and R. F. Kraphol, 1974 : Wave particle velocity measured under ocean waves. J. Geophys. Res., 79(6), 847–852.

Thornton, E. B. and R. T. Guza, 1986 : Surf zone longshore currents and random waves : field data and models. J. Phys. Oceanogr., 16(7), 1,165–1,178.

Thorpe, S. A., 1966 : On wave interactions in a stratified fluid. J. Fluid Mech., 24, 737–751.

Thorpe, S. A., T. R. Osborn, J. F. E. Jackson, A. J. Hall, and R. G. Lueck, 2003 : Measurements of turbulence in the upper-ocean mixing layer using autosub. *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 2013–2031.

Toba, Y., 1973 : Local balance in the air-sea boundary processes. II partition of wind stress to waves and current. J. Oceanogr. Soc. Japan, 29, 70–75.

Tolman, H. L., 1991 : Effects of tides and storm surges on North Sea wind waves. J. Phys. Oceanogr., 21, 766–781.

Tolman, H. L., 1994 : Wind waves and moveable-bed bottom friction. J. Phys. Oceanogr., 24, 994–1,009.

Tolman, H. L., 2002a : User manual and system documentation of WAVEWATCH-III version 2.22. Technical Report 222, NOAA/NWS/NCEP/MMAB.

Tolman, H. L., 2002b : Validation of WAVEWATCH-III version 1.15. Technical Report 213, NOAA/NWS/NCEP/MMAB.

Tolman, H. L. and D. Chalikov, 1996 : Source terms in a third-generation wind wave model. J. Phys. Oceanogr., 26, 2497–2518.

Traykovski, P., A. E. Hay, J. D. Irish, and J. F. Lynch, 1999 : Geometry, migration, and evolution of wave orbital ripples at LEO-15. *J. Geophys. Res.*, 104(C1), 1,505–1,524.

Trowbridge, J. and O. S. Madsen, 1984 : Turbulent wave boundary layers. 1. model formulation and first-order solution. J. Geophys. Res., 89(C5), 7989–7997.

U. S. Army Corps of Engineers, 2002 : Coastal Engineering Manual, Engineering Manual 1110-2-1100.U. S. Army Corps of Engineers, Washington, D. C.

Ursell, F., 1953 : The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proceedings of the Cambridge philosophical society*, 49, 685–694.

Ursell, F., 1999 : Reminiscences of the early days of the spectrum of ocean waves. *Wind-over-wave couplings*, S. G. Sajjadi, N. H.Thomas, et J. C. R. Hunt, Eds., Clarendon Press, Oxford, U. K., 127–137.

van der Westhuysen, A. J., M. Zijlema, and J. A. Battjes, 2007 : Saturation-based whitecapping dissipation in swan for deep and shallow water. *Coastal Eng.*, 54, 151–170.

von Gerstner, F. J., 1809 : Theorie der wellen. Ann. Phys., 32, 412-440.

Walsh, E. J., D. W. Hancock, III, D. E. Hines, R. N. Swift, and J. F. Scott, 1989 : An observation of the directional wave spectrum evolution from shoreline to fully developed. *J. Phys. Oceanogr.*, 17, 1288–1295.

WAMDI Group, 1988 : The WAM model - a third generation ocean wave prediction model. J. Phys. Oceanogr., 18, 1,775–1,810.

Weber, B. L. and D. E. Barrick, 1977 : On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. Part I : Derivations. J. Phys. Oceanogr., 7, 3–10.

Weber, J. E. and E. Førland, 1990 : Effect of the air on the drift velocity of water waves. J. Fluid Mech., 218, 619–640.

Weber, N., 1991a : Bottom friction for wind sea and swell in extreme depth-limited situations. J. Phys. Oceanogr., 21, 149–172.

Weber, S. L., 1991b : Eddy-viscosity and drag-law models for random ocean wave dissipation. J. Fluid Mech., 232, 73–98.

White, B. S. and B. Fornberg, 1998 : On the chance of freak waves at sea. J. Fluid Mech., 355, 113–138.

Whitham, G. B., 1962 : Mass, momentum and energy flux in water waves. J. Fluid Mech., 12, 135-147.

Wiberg, P. L., 1995 : A theoretical investigation of boundary layer flow and bottom shear stress for smooth, transitional and rough flow under waves. J. Geophys. Res., 100(C11), 22,667–22,679.

Wilson, K. C., 1989 : Friction of wave-induced sheet flow. Coastal Eng., 12, 371-379.

Winterwerp, J., R. de Graaff, J. Groeneweg, and A. P. Luijendijk, 2003 : Modelling of wave damping at guyana mud coast. *Coastal Eng.*, 54, 249–261. 10.1016/j.coastaleng.2006.08.012.

WISE Group, 2007 : Wave modelling the state of the art. Progress in Oceanograpy. In press.

Woodward, P., 1952 : The spectrum of random frequency modulation. Technical Report 168, Telecommunications Research Establishement, Great Malvern, Worcs., England.

Wyatt, L. R., 2000 : Limits to the inversion of HF radar backscatter for ocean wave measurement. J. Atmos. Ocean Technol., 17, 1651–1665.

Xu, Z. and A. J. Bowen, 1994 : Wave- and wind-driven flow in water of finite depth. J. Phys. Oceanogr., 24, 1850–1866.

Young, I. R., 1998 : An experimental investigation of the role of atmospheric stability in wind wave growth. *Coastal Eng.*, 34, 23–33.

Young, I. R., 1999 : Wind generated ocean waves. Elsevier Science, Oxford, 288 pp.

Young, I. R., L. A. Verhagen, and M. L. Banner, 1995 : A note on the bimodal directional spreading of fetch-limited wind waves. J. Geophys. Res., 100(C1), 773–778.

Zakharov, V., F. Dias, and A. Pushkarev, 2004 : One-dimensional wave turbulence. *Physics Reports*, 398, 1–65.

Zakharov, V. E., 1968 : Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2, 190–194.

Zakharov, V. E. and M. M. Zaslavskii, 1982 : The kinetic equation and kolmogorov spectra in the weak turbulence theory of wind waves. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 18, 747–753.

Zhukovets, A. M., 1963 : The influence of bottom roughness on wave motion in a shallow body of water. *Izv. Geophys. Ser. Acad. Sci.*, USSR, 10, 1561–1570.

Zou, Q., 2004 : A simple model for random wave bottom friction and dissipation. J. Phys. Oceanogr., 34, 1460–1467.

136